Il teorema di Tychonov

Emanuele Paolini

30 ottobre 2021

Definizione 1. Sia X uno spazio topologico. X si dice *compatto* se da ogni ricoprimento aperto è possibile estrarre un sottoricoprimento finito:

Definizione 2. Uno spazio topologico X si dice T_2 o di *Hausdorff* se dati comunque $x, y \in X$ punti distinti, esistono un intorno U di x e un intorno V di y, disgiunti.

Proposizione 3. *Sia X spazio topologico T_2, $K \subset X$ compatto e $x_0 \in X \setminus K$. Allora esistono due aperti disgiunti U, V tali che $K \subset U$ e $x_0 \in V$.*

Dimostrazione. Visto che X è T_2 per ogni $x \in K$ esistono un aperto $U_x \ni x$ e un aperto $V_x \ni x_0$ disgiunti. La famiglia $\{U_x : x \in K\}$ risulta essere un ricoprimento aperto di K dal quale, essendo K compatto, posso estrarre un ricoprimento finito: $\{U_{x_i} : x_i \in K, i = 1, \dots, N\}$. Allora posto

$$U := \bigcup_{i=1}^{N} U_{x_i}, \quad V = \bigcap_{i=1}^{N} V_{x_i}$$

risulta che U, V sono aperti disgiunti con $U \supset K$ e $x_0 \in V$. □

Proposizione 4. *Sia X uno spazio topologico compatto e T_2. Allora ogni intorno di $x_0 \in X$ contiene un intorno chiuso di x_0.*

Dimostrazione. Sia W un generico intorno aperto di x_0. Allora $X \setminus W$ è compatto, perciò esistono per la Proposizione 3 due aperti disgiunti U, V con $U \supset X \setminus W$ e $V \ni x_0$. Dunque $X \setminus U$ è un intorno chiuso di x_0 contenuto in W. □

Definizione 5. Una famiglia $\mathcal{F}$ di insiemi si dice aver la *proprietà dell'intersezione finita* (PIF) se per ogni $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ finito si ha

$$\bigcap \mathcal{F}_0 := \bigcap_{A \in \mathcal{F}_0} A \neq \emptyset.$$

Osserviamo che uno spazio topologico X è compatto se e solo se ogni famiglia $\mathcal{F}$ di chiusi di X con la proprietà PIF ha intersezione non vuota: $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.

Infatti si tratta semplicemente di osservare che il passaggio di ogni insieme al suo complementare mette in corrispondenza i seguenti concetti

aperto	$\leftrightarrow$	chiuso
ricoprimento dello spazio	$\leftrightarrow$	intersezione vuota
sottoricoprimento finito	$\leftrightarrow$	sottofamiglia finita con intersezione vuota

dunque passando ai complementari e invertendo le implicazioni si ottiene

$$\begin{array}{rc}
\forall \mathcal{R} \text{ famiglia di aperti:} & \bigcup \mathcal{R} = X \implies \exists \mathcal{R}_0 \subset \mathcal{R} \text{ finito } \bigcup \mathcal{R}_0 = X \\
& \Updownarrow \\
\forall \mathcal{F} \text{ famiglia di chiusi:} & \bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset \impliedby \forall \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F} \text{ finito } \bigcap \mathcal{F}_0 \neq \emptyset
\end{array}$$

cioè

Osservazione 6. Uno spazio X è compatto se e solo se ogni famiglia di chiusi con la proprietà PIF ha intersezione non vuota.

Definizione 7. Diciamo che $\mathcal{M}$ è una famiglia *massimale* di chiusi con la PIF se non esiste alcuna famiglia di chiusi $\mathcal{M}' \supset \mathcal{M}$ con la PIF.

Proposizione 8. *Se $\mathcal{F}$ è una famiglia di chiusi con la PIF esiste sempre una famiglia di chiusi $\mathcal{M} \supset \mathcal{F}$ massimale, con la PIF.*

Dimostrazione. Si tratta di applicare il Lemma di Zorn. Sulle famiglie con la PIF di chiusi contenenti $\mathcal{F}$ consideriamo l'ordinamento dato dall'inclusione. Vogliamo allora dimostrare che ogni catena $\mathcal{F}_\alpha$ di famiglie con la PIF può essere maggiorata con la sua unione $\mathcal{F} := \bigcup_\alpha \mathcal{F}_\alpha$. $\mathcal{F}$ è chiaramente una famiglia di insiemi chiusi. Osserviamo che scelta comunque una sottofamiglia $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ finita, è possibile trovare α tale che $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_\alpha$ in quanto ogni elemento C_i di $\mathcal{F}_0$ sta in un qualche $\mathcal{F}_{\alpha_i}$, e visto che ne abbiamo solo un numero finito esisterà nella catena un $\alpha \geq \alpha_i$ per ogni i. Dunque siccome $\mathcal{F}_\alpha$ ha la PIF, si conclude che $\bigcap \mathcal{F}_0 \neq \emptyset$. Dunque $\mathcal{F}$ ha la PIF, e quindi è un maggiorante ammissibile della catena $\mathcal{F}_\alpha$.

Il Lemma di Zorn ci assicura allora l'esistenza di un elemento massimale $\mathcal{M}$ ovvero una famiglia massimale di chiusi con la proprietà PIF contenente $\mathcal{F}$. □

Proposizione 9. *Se $\mathcal{M}$ è una famiglia massimale di chiusi con la PIF allora*

(i) se $A, B \in \mathcal{M}$ anche $A \cap B \in \mathcal{M}$;

(ii) se $A \cap B \neq \emptyset$ per ogni $B \in \mathcal{M}$, allora $A \in \mathcal{M}$.

Per il primo punto basta mostrare che $\mathcal{M}' := \mathcal{M} \cup \{A \cap B\}$ ha la PIF. Sia dunque $\mathcal{F}_0$ una sottofamiglia finita di $\mathcal{M}'$. Se $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{M}$ chiaramente $\mathcal{F}_0$ avrà la PIF. In caso contrario $\mathcal{F}_0$ sarà della forma

$$\mathcal{F}_0 = \{A_1, A_2, \ldots, A_N, A \cap B\}.$$

Ma allora osserviamo che

$$\left(\bigcap_{i=1}^{N} A_i \right) \cap (A \cap B) = \left(\bigcap_{i=1}^{N} A_i \right) \cap A \cap B \neq \emptyset$$

in quanto $\{A_1, \dots, A_N, A, B\}$ è una sottofamiglia finita di $\mathcal{M}$.

Per il secondo punto vogliamo invece dimostrare che $\mathcal{M}' := \mathcal{M} \cup \{A\}$ ha la PIF, sapendo che $A \cap B \neq \emptyset$ per ogni $B \in \mathcal{M}$. Sia dunque $\mathcal{F}_0$ una sottofamiglia di $\mathcal{M}'$ non interamente contenuta in M. Si avrà

$$\mathcal{F}_0 = \{A_1, A_2, \dots, A_N, A\}.$$

Per il punto precedente, iterato $N-1$ volte, si ha che $B = A_1 \cap \dots \cap A_N \in \mathcal{M}$. Dunque

$$\bigcap \mathcal{F}_0 = A_1 \cap \dots \cap A_N \cap A = A \cap B \neq \emptyset.$$

Proposizione 10. *Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di sottoinsiemi di X con la PIF. Sia $f\colon X \to Y$ una funzione. Allora*

$$\mathcal{F}' := \{f(A) \colon A \in \mathcal{F}\}$$

è una famiglia di sottoinsiemi di Y con la PIF.

Dimostrazione. È sufficiente ricordare che vale

$$f(A_1) \cap \dots \cap f(A_N) \supset f(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_N).$$ □

Teorema 11 (Tychonov)**.** *Siano X_i spazi topologici compatti e T_2 per ogni i in una generica famiglia di indici I. Allora lo spazio prodotto*

$$X = \prod_{i \in I} X_i$$

munito della topologia meno fine che rende continue le proiezioni

$$\pi_i \colon X \to X_i$$
$$x \mapsto x_i$$

è compatto e T_2.

Dimostrazione. Notiamo innanzitutto che X è T_2. Siano $x, y \in X$, $x \neq y$. Allora esiste $i \in I$ tale che $x_i \neq y_i$. Visto che X_i è T_2 possiamo trovare U_i, V_i aperti disgiunti in X_i tali che $x_i \in U_i$, $y_i \in V_i$. Posto $U = \pi_i^{-1}(U_i)$, $V = \pi_i^{-1}(V_i)$ possiamo facilmente verificare che U e V sono intorni aperti disgiunti dei punti x e y.

Per dimostrare che X è compatto sarà sufficiente dimostrare che ogni famiglia di chiusi $\mathcal{F}$ con la proprietà PIF ha intersezione non vuota. Sia dunque $\mathcal{F}$ una tale famiglia. Innanzitutto estendiamo $\mathcal{F}$ ad una famiglia massimale $\mathcal{M} \supset \mathcal{F}$ con la PIF. Ovviamente sarà $\bigcap \mathcal{M} \subset \bigcap \mathcal{F}$ dunque sarà sufficiente dimostrare che la famiglia $\mathcal{M}$ ha intersezione non vuota.

Per ogni $i \in I$ definiamo

$$\mathcal{M}_i := \{\overline{\pi_i(A)} \colon A \in \mathcal{M}\}.$$

Per la proposizione 10 la famiglia $\mathcal{M}_i$ ha la PIF e visto che X_i è compatto ogni famiglia $\mathcal{M}_i$ ha intersezione non vuota. Dunque per ogni $i \in I$ possiamo trovare $x_i \in X_i$, $x_i \in \bigcap \mathcal{M}_i$. Il nostro scopo sarà dimostrare che il punto

$$x := (x_i)_{i \in I}$$

risulta essere elemento dell'intersezione $\bigcap \mathcal{M}$, che dunque dovrà essere non vuota.

Per fare ciò dimostreremo che nella famiglia $\mathcal{M}$ possiamo trovare un sistema fondamentale di intorni chiusi di x. Sia W un qualunque intorno di x. Per come è definita la topologia su X e per la proposizione 4 sappiamo che esistono $i_1, \ldots, i_N \in I$ e $V_{i_k} \subset X_{i_k}$ tali che V_{i_k} è un intorno chiuso di x_{i_k} e

$$\bigcap_{k=1}^{N} \pi_{i_k}^{-1}(V_{i_k}) \subset W.$$

Osserviamo che per ogni $A \in \mathcal{M}$ si ha $x_{i_k} \in \pi_{i_k}(A)$ e dunque $A \cap \pi_{i_k}^{-1}(V_{i_k}) \neq \emptyset$. Dunque $\pi_{i_k}^{-1}(V_{i_k}) \in \mathcal{M}$ per ogni $k = 1, \ldots, N$ e di conseguenza

$$v = \bigcap_{k=1}^{N} \pi_{i_k}^{-1}(V_{i_k}) \in \mathcal{M}.$$

Dunque per ogni $A \in \mathcal{M}$ e per ogni W intorno di x abbiamo verificato che $A \cap W \neq \emptyset$ cioè $x \in \bar{A} = A$, come volevamo dimostrare. $\square$