

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI
FIRENZE
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE FISICHE E NATURALI

Corso di laurea
in
MATEMATICA

*Immersioni Isometriche,
Mappe Origami e Mozartkugeln*

RELATORE
Dr. Emanuele Paolini

CANDIDATO
Antonio Caserta

ANNO ACCADEMICO 2012-2013

1 Introduzione.

L'origami, l'antica arte giapponese di piegare la carta, prende in considerazione la piegatura di un poligono di carta (i.e. quadrato, rettangolo) con un numero finito di pieghe in un origami "piatto" o tridimensionale. La superficie che ne risulta avrà necessariamente la curvatura gaussiana pari a zero in ogni suo punto; questo ci fa capire che localmente il foglio di carta piegato risulterà isometrico ad un piano, perché le pieghe effettuate preservano la metrica intrinseca del foglio. Da quanto detto risulta geometricamente impossibile, utilizzando pieghe tradizionali, portare un piano in una sfera, in cui ogni punto ha curvatura gaussiana diversa da zero.

Anche se l'origami è soprattutto un prodotto artistico, esso ha ricevuto e riceve ancora oggi grande attenzione da parte dei matematici perché risulta possedere molte proprietà algebriche e geometriche. In questo lavoro tratterò l'origami da un punto di vista analitico, mentre per una trattazione algebrico-geometrica dell'argomento si rimanda a [1] [2].

Immaginiamo di piegare un foglio di carta: tale foglio risulta rigido nelle sue direzioni tangenti. Inoltre non è possibile allungarlo, comprimerlo o tagliarlo in pezzi. Se tale foglio di carta fosse vincolato su un piano, si potrebbero ottenere solo dei moti rigidi, cioè solo rotazioni e traslazioni dell'intero foglio, ma fisicamente si può subito osservare che lungo la direzione normale può essere piegato con estrema facilità. Questo è dovuto al materiale che utilizziamo (la carta ha uno spessore "infinitesimo") e alle proprietà elastiche delle fibre del foglio.

Nell'origami tradizionale, un foglio di carta P è una varietà 2-dimensionale, in genere un poligono piatto e una piega $f : P \rightarrow \mathbb{R}^3$ è una mappa isometrica senza autointersezioni dal foglio nello spazio euclideo 3-dimensionale. L'essere isometrico significa che la mappa mantiene la metrica intrinseca i.e. le distanze come misurate dal cammino più corto sul pezzo di carta, prima e dopo l'applicazione della "funzione" piega. Nell'articolo [6] si parla di un procedimento che fa sì che il foglio non preservi la metrica intrinseca e che può cambiare la curvatura gaussiana in tutti i punti. Nello stesso articolo viene definito inoltre un tipo di piegatura meno restrittivo che consente di cambiare la curvatura, non permettendo l'allungamento del materiale ma consentendone una sua riduzione arbitraria. In altri termini la metrica intrinseca può essere contratta ma non espansa dalla applicazione di tale procedimento. Questo tipo di piega si può descrivere fisicamente utilizzando l'espressione "wrapping". Tale termine sta ad indicare una trasformazione contrattiva per mezzo della quale un pezzo di carta viene portato in uno spazio euclideo 3-dimensionale. Il termine contrattivo è usato per indicare che ogni distanza può decrescere o rimanere la stessa, come misurata dal cammino prima



Figura 1: *Mozartkugel* o palla di mozart.

e dopo la piegatura. Tale “wrapping” è giustificata dal Teorema di Burago e Zalgaller e, per avere un rapporto con la realtà, la definizione chiede che la contrazione della lunghezza possa essere ottenuta da infinitesime pieghe “crinkling” del materiale. Questo tipo di piega è stata studiata per il settore del confezionamento, ad esempio delle palle di Mozart, conosciute anche come *Mozartkugeln*, ed inventate nel 1890 da Paul Furst a Salisburgo, sono dei famosi cioccolatini austriaci ed i fogli di alluminio che vengono utilizzati per il loro confezionamento sono facilmente “increspabili”. Queste deformazioni portano effettivamente alla formazione di una curvatura positiva lungo tutto l’involucro. In questo lavoro, focalizziamo sì la nostra attenzione a piegare un foglio di carta fino a portarlo in una superficie relativamente liscia (i.e. sfera) e utilizzando pieghe tradizionali, senza però estendere il concetto di piegatura e andando a perturbare, in modo opportuno, la varietà che dobbiamo ottenere dalla piegatura del foglio di carta.

J.Nash [3] nel 1954 introduce lo studio delle immersioni e dei cosiddetti embeddings isometrici di Classe C^1 , tale studio viene migliorato successivamente da N.H. Kuiper [4] nel 1955. In quegli anni provarono che ogni varietà astratta n -dimensionale poteva essere immersa (imbedded) in \mathbb{R}^m con $m \geq n + 1$, per un approfondimento si rimanda a [5].

La tesina è divisa in tre sezioni: nella prima daremo alcune definizioni e risultati generali sulle immersioni isometriche, sulle mappe origami e cercheremo di meglio formalizzare il concetto di piega; nella seconda sezione, verrà introdotto un risultato dovuto a Nash del 1954 e successivamente ampliato da Kuiper nel 1955 sulle immersioni isometriche di varietà; nell’ultima sezione andremo ad esporre la dimostrazione del Teorema di Burago-Zalgaller con un metodo che si rifà a Conti e Maggi [7] e ne daremo una dimostrazione

costruttiva con l'uso degli origami.

Vorrei infine ringraziare il mio relatore Emanuele Paolini per la sua disponibilità e per avermi aiutato a trovare un argomento tra analisi e origami, entrambi vicini alle mie attitudini. Ringrazio inoltre la mia famiglia per avermi sostenuto in questi anni e, nel periodo di redazione della tesi, in particolar modo mio fratello Francesco, per avermi spronato nei momenti difficili e per avermi aiutato a realizzare, con l'utilizzo dei software Rhinoceros e Grasshopper, le costruzioni grafiche presenti nel lavoro.

2 Definizioni e risultati preliminari.

Iniziamo questa sezione dando alcune definizioni che ci saranno utili in seguito e formalizzando il problema descritto in precedenza.

Definizione 2.1. La mappa $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è un' *immersione isometrica* se è una mappa C^1 e se $\forall x \in \mathbb{R}^n$ il gradiente $Du(x)$ è una matrice ortogonale, ovvero se $Du^T Du = \mathbb{I}$.¹

Lemma 2.2. Se u è un' immersione isometrica allora “mantiene la lunghezza di ogni curva” cioè $l(u \circ \gamma) = l(\gamma) \quad \forall$ curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ dove l denota la lunghezza della curva.

Dimostrazione. Sia γ una curva, indicando con $l(\gamma)$ la lunghezza di tale curva e con $u(\gamma)$ l'immagine della curva per mezzo dell'immersione isometrica si ha che:

$$l(u \circ \gamma) = l(u(\gamma)) = \int_0^1 \left| \frac{d}{dt} u(\gamma(t)) \right| dt$$

Perciò,

$$\int_0^1 |Du(\gamma(t))\gamma'(t)| dt = \int_0^1 |\gamma'(t)| dt = l(\gamma).$$

□

Dalla definizione [2.1] segue che se $m < n$ allora non è possibile avere $Du^T Du = Id$. Infatti in \mathbb{R}^m non esistono $m + 1$ vettori linearmente indipendenti. Quindi si possono considerare immersioni isometriche solo quando $m \geq n$. Nel caso particolare in cui $m = n$ ogni $C^1(\mathbb{R}^n)$ mappa isometrica è affine (Cf. *Teo Liouville*²) e quindi può essere rappresentata nella forma $u(x) = Ax + b$ con $A \in O(n)$ e $b \in \mathbb{R}^m$ e $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

¹Per $x \in \mathbb{R}^n$ scriviamo che $Du(x) \in O(m, n)$.

²Preso Ω un aperto connesso di \mathbb{R}^n , $u \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e $Du \in O(n)$. Allora u è affine e quindi Du è costante.

Definizione 2.3. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ un'applicazione. La mappa è *short* se $|u(x) - u(y)| \leq |x - y| \quad \forall x, y \in \Omega$

Definizione 2.4. Sia $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Si dice che u è una *mappa rigida* se è lipschitziana e il gradiente $Du(x) \in O(m, n)$ per q.o. $x \in \Omega$. L'insieme singolare in cui la mappa rigida u non è differenziabile è chiamato "*crease pattern*" e lo indicheremo con Σ_u .

Osservazione 2.5. Se u è una mappa rigida, Du conserva il prodotto scalare e quindi u mantiene la lunghezza delle curve in analogia a quanto già dimostrato nel lemma 2.2.

Definizione 2.6. (*Mappe origami*) Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un insieme aperto. Una *mappa origami* è una coppia (T, u) in cui:

- $T = \{T_j\}_j$ è una famiglia finita di triangoli con interni disgiunti e tale che Ω è contenuto in $\Omega_T := \cup_{T_j \in T} T_j$ e ogni coppia (T_i, T_j) è disgiunta o ha in comune un vertice o un lato.
- u è una mappa affine su ogni T_j e il gradiente $Du \in O(3, 2)$ quasi ovunque.

Nel caso $m > n$ la mappa è meno rigida che nel caso $m = n$, il gradiente può variare con continuità. Ad esempio data una curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizzata per lunghezza d'arco, la mappa $u(x, y) = (\gamma(x), y) \in \mathbb{R}^3$ è una mappa rigida la cui immagine è un cilindro proiettato sulla curva γ , l'insieme singolare Σ_u è costituito dall'insieme vuoto.

Un esempio particolarmente importante in cui l'insieme singolare Σ_u è costituito da curve, è rappresentato in (fig.2a).

Si parte da un quadrato in cui viene tracciato un arco di 90 gradi avente per raggio il lato del quadrato. Possiamo immaginare che l'arco sia una linea di piegatura verso la quale possono concorrere due superfici coniche (fig.3).

In (fig.4) è stato rappresentato uno degli origami più conosciuti (*the crane*) e alla sua destra l'insieme singolare Σ_u .

Definizione 2.7. (*Origami piatto*) Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Una mappa $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ è un origami piatto se è una mappa origami e $u(\Omega)$ è contenuto in un piano. Ovvero u può essere rappresentato a meno di isometrie da una mappa $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$

Osservazione 2.8. Si può osservare che l'origami suddetto è un esempio di origami piatto e il crease pattern è costituito soltanto da segmenti di linee rette.

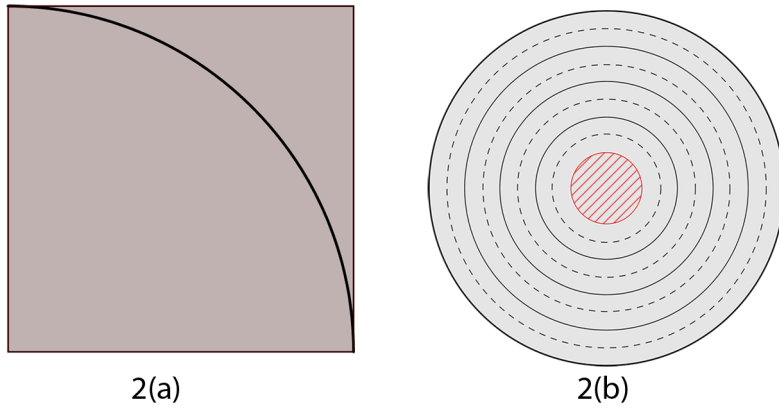


Figura 2: 2(a). Insieme singolare o particolare crease pattern “curvilineo” a partire da un foglio quadrato. 2(b) Demaine in [17] congettura che il crease pattern può essere piegato a formare una superficie a forma di sella; in rosso è stata rappresentata la parte che deve essere rimossa.



Figura 3: Processo di piegatura del crease pattern in Figura 2

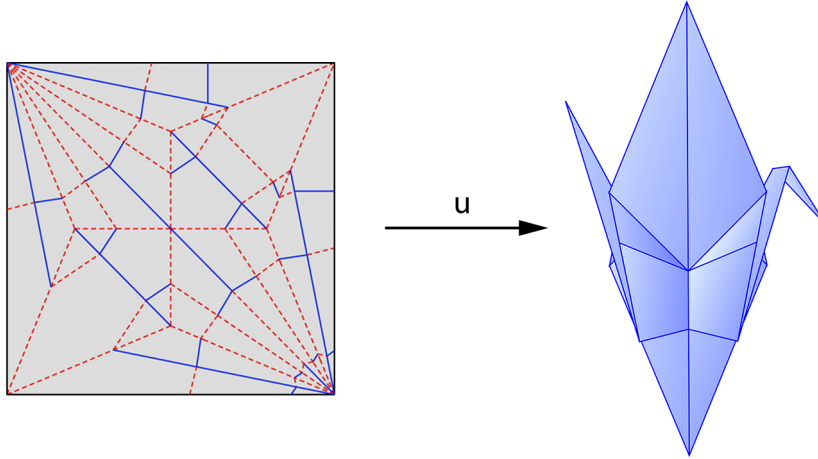


Figura 4: *flapping bird* con il suo crease pattern o insieme singolare a sinistra.

In questo lavoro porremo la nostra attenzione sulle mappe rigide che sono un buon modello per l'origami e prenderemo in considerazione origami da \mathbb{R}^2 in \mathbb{R}^3 senza ammettere pieghe curve, quindi insiemi singolari Σ_u come quelli in (fig.2a) o il caso della sella (fig.2b), ma solo quelli costituiti da un insieme di segmenti rettilinei.

Diamo alcune definizioni e alcune proprietà dell'insieme singolare che valgono per mappe $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ che ci saranno utili nel seguito della trattazione e nella dimostrazione del Teorema di Burago-Zalgaller.

Possiamo dimostrare che l'insieme singolare Σ_u ha la proprietà di possedere misura nulla.

Teorema 2.9. (*Rademacher*) Sia U un insieme aperto di \mathbb{R}^n e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione lipschitziana. Allora f è differenziabile q.o. in U (i.e. i punti in U in cui f non è differenziabile formano un insieme di misura nulla).

Osservazione 2.10. Nel nostro caso la mappa che prendiamo in esame e che descrive l'*origami* è una mappa lipschitziana, quindi l'insieme dei punti in cui non è differenziabile (ovvero il *crease pattern*) ha misura nulla e non ha punti interni.

Nel seguito mostreremo che l'insieme delle mappe short costituisce la chiusura delle mappe origami rispetto alla convergenza uniforme.

Definizione 2.11. (*Norma sullo spazio di matrici*) Sia $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, si definisce la norma di A il valore

$$\|A\| = \sup_{v \neq 0} \frac{\|Av\|}{\|v\|} = \sup\{\|Av\| : \|v\| \leq 1\}.$$

Osservazione 2.12. Si può osservare che se $M \in O(m, n)$, allora $\|M\| = 1$

Proposizione 2.13. Sia $O(m, n)$ l'insieme delle matrici $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tali che $M^T M = \mathbb{I}$ allora l'involuppo convesso di $O(m, n)$ è costituito da tutte le matrici $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ che hanno norma al massimo 1.

Dimostrazione. Indichiamo con $InvConv(O(m, n))$ l'involuppo convesso delle matrici appartenenti a $O(m, n)$. Sia $C \in InvConv(O(m, n))$ allora C si scrive $C = \sum_{k=1}^N \lambda_k A_k$ con $A_k \in O(m, n)$ e $\lambda_k \in [0, 1]$ e $\sum \lambda_k = 1$. Stimiamo la norma di tale matrice; sia $v \in \mathbb{R}^n$ allora si ha, $\|Cv\| \leq \sum \|\lambda_k A_k v\| = \sum \lambda_k \|v\| = \|v\|$, il segno di minore o uguale segue dalla disuguaglianza triangolare, mentre la seconda uguaglianza segue dal fatto che $A_k \in O(m, n)$. Quindi si ha che $\|Cv\| \leq \|v\|$, infine passando all'estremo superiore si ha $\|C\| \leq 1$. Viceversa supponiamo che $\|A\| \leq 1$. Consideriamo la decomposizione ai valori singolari di $A = U\Sigma V^T$, con U, V matrici ortogonali e $\Sigma = diag(s)$ con $s \in [0, 1]^n$ ³. Dato che il prodotto di matrici ortogonali è ortogonale, è sufficiente mostrare che Σ è una combinazione convessa di matrici ortogonali (i.e. $S = \sum_{i=1}^n \lambda_i S_i$ con $\lambda_i \in [0, 1]$ e $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$).⁴ Si può vedere che s è combinazione convessa dei punti $s_1, s_2, \dots, s_{2^n} \in \{-1, 1\}^n$ ⁵; quindi Σ è combinazione convessa di $diag(s_1), diag(s_2), \dots, diag(s_{2^n})$, che sono ortogonali. \square

Le mappe short sono quelle per cui il gradiente assume valori nell'involuppo convesso di $O(m, n)$. Infatti se u è una mappa short allora $\|Du\| \leq 1$, allora dalla precedente proposizione segue che Du appartiene all'involuppo convesso di $O(m, n)$. Indichiamo con O l'insieme costituito dalle mappe origami, con \bar{O} la sua chiusura e con S l'insieme delle mappe short, si può dimostrare che la chiusura delle mappe origami non è più ampia delle mappe short (i.e. $\bar{O} \subset S$).

Infatti sia u_k una successione di mappe origami (i.e. $u_k \in O$) quindi $\|u_k(x) - u_k(y)\| \leq \|x - y\|$ e supponiamo che $u_k \rightarrow u$ uniformemente allora si ha che :

$$\|u(x) - u(y)\| \leq \|u(x) - u_k(x)\| + \|u_k(x) - u_k(y)\| + \|u_k(y) - u(y)\|$$

³ $s \in [0, 1]^n$ in quanto i valori singolari sono sempre positivi e il piu grande autovalore singolare è minore di 1

⁴Infatti la matrice A si può scrivere: $A = U(\sum_{i=1}^n \lambda_i S_i)V^T = \sum_{i=1}^n \lambda_i (US_i V^T) = \sum_{i=1}^n \lambda_i D_i$ con $D_i = US_i V^T$ matrice ortogonale

⁵Geometricamente la combinazione convessa dei vertici genera il cubo n-dimensionale.

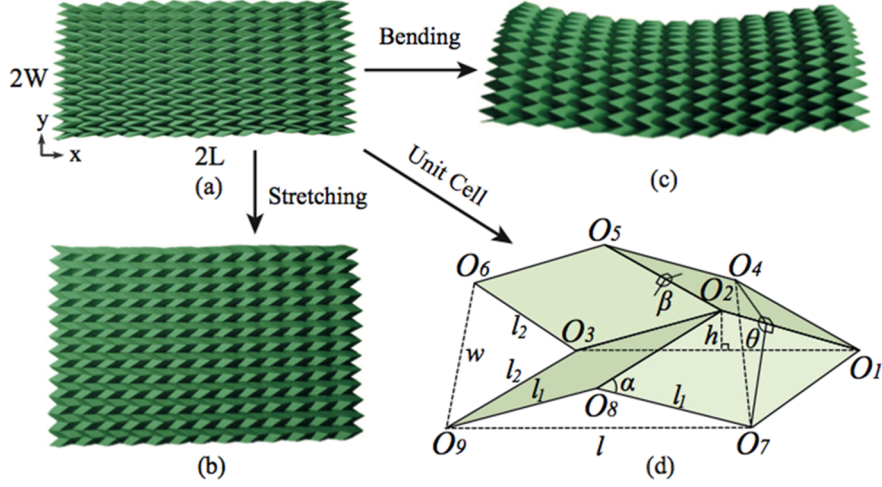


Figura 5: *Miura-ori map e geometria della singola cella.* (a) Piegatura Miura-ori da un foglio di carta contenente 13x13 celle unitarie (lungo x e y), con $\alpha = \frac{\pi}{4}$ e $l_1 = l_2$. (d) Cella unitaria del Miura-ori pattern che è caratterizzata da due angoli α e θ dati l_1 e l_2 . Si osserva che è simmetrica rispetto al piano passante per O_1, O_2, O_3 .

$$\leq \|u_k - u\|_{C^0} + \|x - y\| + \|u_k - u\|_{C^0}$$

l'ultima disuguaglianza tende per $k \rightarrow \infty$ a $\|x - y\|$. Da quanto detto segue che $\bar{O} \subset S$

Come esempio consideriamo un'importante mappa origami, chiamata *Miura-Ori*.⁶ Tale piegatura è *periodica* nel senso che è composta da celle identiche unitarie di pieghe a monte e a valle con quattro-coordinate rigide, definite completamente da due angoli e da due lunghezze. La geometria della cella elementare costituisce l'elemento di base in tutte le strutture a pieghe non banali, la piega a monte o a valle, in cui quattro bordi (pieghe) si intersecano in un unico vertice (fig. 5d). La singola cella di lunghezza l , larghezza w e altezza h può essere parametrizzata da due angoli $\theta \in [0, \pi]$ e $\beta \in [0, \pi]$, e un angolo α . Possiamo pensare a tale struttura come costituita da identiche placchette rigide, unite da cerniere elastiche. Dato che ciascuna placchetta in una cella unitaria può ruotare rigidamente sulle cerniere, la struttura si può distribuire uniformemente nel piano (fig.5b).

La costruzione presentata però è troppo rigida per dimostrare che l'insieme delle mappe short è la chiusura delle mappe origami e non ci permette di prendere in esame limiti non affini, ma solo compressioni affini biassiali.

⁶In onore del suo scopritore Ohio Miura, astrofisico giapponese.

Nella sezione che segue utilizzeremo un metodo che, partendo da una mappa $u \in C^1$ con $Du \in O(3, 2)$ ovunque (i.e. isometria), otterremo, attraverso una opportuna triangolazione e una scalatura, una mappa che si dimostrerà essere localmente vicina ad una mappa short affine.

3 Teorema di Nash-Kuiper per immersioni isometriche.

Incominciamo tale sezione considerando la sfera $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Supponiamo che $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ immerga isometricamente la sfera in \mathbb{R}^3 e supponiamo che $f \in C^2$. Il teorema Egregium di Gauss, garantisce il mantenimento della curvatura gaussiana della sfera e questo è sufficiente affinché $f(\mathbb{S}^2)$ sia anch'essa una sfera. Quindi se richiediamo che $f \in C^2$, l'unica possibilità è di essere un movimento rigido dello spazio, ovvero la composizione di una rotazione con una traslazione. Ciò che Nash nel 1954 e successivamente Kuiper nel 1955 dimostrano è che le immersioni isometriche di classe C^1 sono C^0 dense nelle immersioni short. Per visualizzare tale risultato, si può immaginare di “arricciare” $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ all'interno di una piccola palla B_ε con ε arbitrario. Se consideriamo la mappa che riduce in maniera omotetica, $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \varepsilon\mathbb{S}^n$ osserviamo che è un'immersione short e quindi, applicando il risultato di Nash-Kuiper che vedremo più avanti, si può mostrare che in un intorno C^0 dell'accorciamento esistono immersioni isometriche C^1 ; in particolar modo esistono immagini isometriche C^1 di \mathbb{S}^n in un arbitrario intorno B_ε . Passiamo ora a enunciare il Teorema di Nash'54 e poi di Kuiper'55 e a darne un'idea della dimostrazione.

Teorema 3.1. (*Teorema di Nash su immersioni isometriche-1954*) Sia $m \geq n + 2$ e $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ un'immersione short C^∞ . Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una $u_\varepsilon \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ tale che:

- $\|u - u_\varepsilon\|_{C^0(\Omega)} < \varepsilon$ ovvero la u_ε dista “poco” dalla u .
- $Du_\varepsilon \in O(m, n)$ su $\overline{\Omega}$ ovvero u_ε è un'immersione isometrica.

Osservazione 3.2. Nel caso in cui l'immersione $u \notin C^\infty$ ma sia solo short e limitata in Ω , ovvero non abbia la regolarità richiesta, possiamo cercare di “lisciare” l'immersione utilizzando opportune funzioni (i.e. nuclei mollificatori) preservando comunque la condizione di essere short. Infatti se u è tale che $\|u(x) - u(y)\| \leq L\|x - y\|$ con $L < 1$, allora è uniformemente continua in quanto Lipschitziana. Utilizzando dei nuclei mollificatori ⁷allora

⁷Per maggiori approfondimenti sui nuclei mollificatori si rimanda a [9]

$\tilde{u}_\varepsilon = j_\varepsilon * u \rightarrow u$ uniformemente in Ω con $\varepsilon \rightarrow 0^+$ in quanto u è anche uniformemente continua in Ω . Inoltre $\tilde{u}_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$ e risulta essere short infatti vale che:

Lemma 3.3. Sia u è L-lipschitziana in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con Ω misurabile, allora anche \tilde{u}_ε è L-lipschitziana.

Dimostrazione. Siano x_1 e x_2 in Ω con $d(x_i, \partial\Omega) > \varepsilon$, allora

$$\|\tilde{u}_\varepsilon(x_1) - \tilde{u}_\varepsilon(x_2)\| = \left\| \int_{\Omega} u(y)j_\varepsilon(x_1 - y)dy - \int_{\Omega} u(y)j_\varepsilon(x_2 - y)dy \right\|,$$

ponendo $z = x_2 - x_1 + y$ si ha che:

$$= \left\| \int_{\Omega} u(x_1 - x_2 + z)j_\varepsilon(x_2 - z)dz - \int_{\Omega} u(y)j_\varepsilon(x_2 - y)dy \right\|.$$

Rinominando $z = y$ si ha :

$$\begin{aligned} &\leq \int_{\Omega} \| [u(x_1 - x_2 + y) - u(y)] \| j_\varepsilon(x_2 - y)dy \\ &\leq L\|x_1 - x_2\| \int_{\Omega} j_\varepsilon(x_2 - y)dy = L\|x_1 - x_2\| \end{aligned}$$

essendo $\int_{\Omega} j_\varepsilon(x_2 - y)dy = 1$ dalle proprietà dei nuclei mollificatori. Abbiamo quindi dimostrato che $\|\tilde{u}_\varepsilon(x_1) - \tilde{u}_\varepsilon(x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|$; dato che tale argomento vale per ogni scelta di x_1 e x_2 si ha la tesi. □

Si vuole costruire quindi una isometria $u_\varepsilon \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ arbitrariamente vicina a u , cioè vorremmo “stirare” l’immersione u fino a renderla isometrica, preservando la condizione che $\|u - u_\varepsilon\|_{C^0(\Omega)} < \varepsilon$. Iterativamente si crea una successione di immersioni short, ciascuna delle quali riduce l’errore metrico

$$\mathbb{I} - Du^T Du.$$

In questo caso, dato che $u(\Omega) \subset \mathbb{R}^m$ è una varietà di codimensione almeno due, l’idea è quella di perturbare l’immersione iniziale con

$$u_1(x) = u(x) + \frac{a(x)}{\lambda} [\sin(\lambda \langle x, \xi \rangle) \zeta(x) + \cos(\lambda \langle x, \xi \rangle) \eta(x)],$$

dopo aver scelto due vettori unitari e ortogonali tra loro e normali a $u(\Omega)$ ovvero $\zeta, \eta \in C^\infty(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ tali che

$$\forall x \in \Omega \quad \|\zeta\| = \|\eta\| = 1 \quad \langle \zeta, \eta \rangle = 0 \quad e \quad Du^T \zeta = Du^T \eta = 0$$

e in cui $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$ individua una direzione in \mathbb{R}^n . In tal modo

$$Du_1(x) = Du(x) + a(x)[\cos(\lambda\langle x, \xi \rangle)(\zeta \otimes \xi) - \sin(\lambda\langle x, \xi \rangle)(\eta \otimes \xi)] + O\left(\frac{1}{\lambda}\right). \quad (3.1)$$

Quindi dall'espressione precedente si ha che:

$$Du_1^T Du_1 = Du^T Du + a^2 \xi \otimes \xi + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad (3.2)$$

Si può dimostrare che l'errore metrico (“distanza metrica”) relativo all'immersione short

$$\mathbb{I} - Du^T Du > 0 \quad (3.3)$$

ovvero,

$$a^2 \xi \otimes \xi + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) > 0$$

può essere decomposto in una somma finita di metriche primitive, cioè

$$\mathbb{I} - Du^T Du = \sum_{i=1}^N a_i^2 \xi^i \otimes \xi^i \quad (3.4)$$

quindi con un numero finito N di passi si produce un'immersione short u_1 con le seguenti proprietà:

- (i) L'immersione riduce l'errore metrico (i.e. $\|\mathbb{I} - Du_1^T Du_1\|_{C^0(\Omega)} < \varepsilon$)
- (ii) Possiamo controllare ancora le derivate prime di u_1

$$\|Du_1 - Du\|_{C^0(\Omega)} \leq C \|\mathbb{I} - Du^T Du\|_{C^0(\Omega)}^{\frac{1}{2}}$$

- (iii) Non ci siamo allontanati dall'immersione iniziale (i.e. $\|u - u_1\|_{C^0(\Omega)} < \varepsilon$)

L'idea della dimostrazione si può riassumere in questo modo: ad ogni “stage” si genera una nuova immersione più vicina alla condizione di isometria, andando poi a decomporre l'errore metrico in somma di metriche primitive e ad ogni passo “step” cioè per ciascuna metrica della somma si perturba l'immersione come in (3.1).

Osservazione 3.4. Le costruzioni che sono alla base della dimostrazione di Nash e poi di Kuiper sono tutte iterative. Bisogna “avvicinarsi” alla condizione di isometria pur rimanendo comunque “corti” per poter continuare ad effettuare gli *stage*.

Sapendo le proprietà precedenti possiamo a questo punto dimostrare il Teorema di Nash.

Dimostrazione. Sia ε_k una successione tale che $\varepsilon_k \rightarrow 0$ e tale che

$$\sum_k \varepsilon_k \leq \varepsilon \quad \text{e} \quad \sum_k \varepsilon_k^{\frac{1}{2}} < +\infty. \quad ^8$$

Con quanto detto precedentemente otteniamo una successione di mappe $u_k \in C^\infty(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ tale che $u_0 = u$ e per $k \geq 1$

$$\|\mathbb{I} - Du_k^T Du_k\|_{C^0(\Omega)} \leq \varepsilon_k$$

$$\|Du_{k+1} - Du_k\|_{C^0(\Omega)} \leq C\varepsilon_k^{\frac{1}{2}}$$

$$\|u_{k+1} - u_k\|_{C^0(\Omega)} \leq \varepsilon_{k+1}$$

Quindi u_k è una successione di Cauchy in C^1 e converge a un limite $\tilde{u} \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^m)$. Quindi si ha che:

$$D\tilde{u}^T D\tilde{u} = \mathbb{I}$$

in Ω e,

$$\|u - \tilde{u}\|_{C^0(\Omega)} \leq \sum_k \varepsilon_k \leq \varepsilon.$$

□

Se supponiamo di fissare lo stadio e la decomposizione in metriche primitive, per ciascuna metrica primitiva (step) si effettua una perturbazione in modo che:

$$Du^T Du \mapsto Du^T Du + a^2 \xi \otimes \xi.$$

Nash utilizza per fare ciò, delle perturbazioni “spiraleggianti” in codimensione 2, mentre Kuiper utilizza delle corrugazioni chiamate nell’articolo [4] “*strains*” per abbassare la codimensione a 1.

⁸Ad esempio possiamo prendere come successione i termini della serie armonica generalizzata (i.e. $\sum_k^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ con $\alpha > 2$)

4 Teorema di Burago-Zalgaller.

In questa sezione inizialmente definiamo cosa si intende per varietà poliedrale che ci servirà per enunciare il teorema di Burago-Zalgaller, si darà un'idea della dimostrazione proposta da Burago e Zalgaller e successivamente daremo un'altra dimostrazione del Teorema, rifacendoci al metodo utilizzato da Conti e Maggi in [7] ricavandone una costruzione esplicita con l'uso degli origami.

Iniziamo col definire il concetto di varietà poliedrale.

Definizione 4.1. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^m$ con $m > n$ lineare piecewise, allora l'immagine attraverso u di Ω ovvero $u(\overline{\Omega})$ è una varietà poliedrale.

Teorema 4.2. (*Teorema di Burago-Zalgaller 1995*) Sia M una varietà poliedrale (un "poliedro"), $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ una immersione C^2 short. Allora tale funzione può essere approssimata da immersioni C^0 lineari piecewise ("origami").

L'idea di base che sta dietro alla dimostrazione del teorema che è quella proposta da Burago e Zalgaller [8] si può adattare, in un certo senso, alla dimostrazione del teorema di Nash e poi Kuiper per le immersioni isometriche. Inizialmente abbiamo una immersione di una superficie poliedrale in \mathbb{R}^3 , composta con una omotetia contrattiva. Allora:

1. si deve creare una successione di "stages" alla Nash e poi suddividerla a sua volta in un numero relativamente grande di "steps" ciascuno dei quali migliora l'approssimazione all'immersione isometrica e tale che la funzione ottenuta in ogni stadio sia short.
2. si devono aggiungere delle "strains" (deformazioni), in modo tale da avere "abbastanza spazio" per immergere isometricamente la superficie in \mathbb{R}^3

Osservazione 4.3. La metrica di un poliedro è localmente piatta ovunque eccetto che per un numero finito di punti, tali punti sono chiamati da Burago e Zalgaller "true vertices". Burago e Zalgaller prendono in considerazione triangolazioni di poliedri che sono costituite da triangoli isometrici a triangoli in \mathbb{R}^2 . Tali triangolazioni sono chiamati sviluppi. Tutti i "true vertices" sono necessariamente i vertici di ogni sviluppo della superficie poliedrale.

In questo lavoro non entreremo nei dettagli della dimostrazione di Burago-Zalgaller ma ci limiteremo a menzionarne le idee principali⁹. Per ottenere

⁹Per uno studio più approfondito si rimanda a [8]

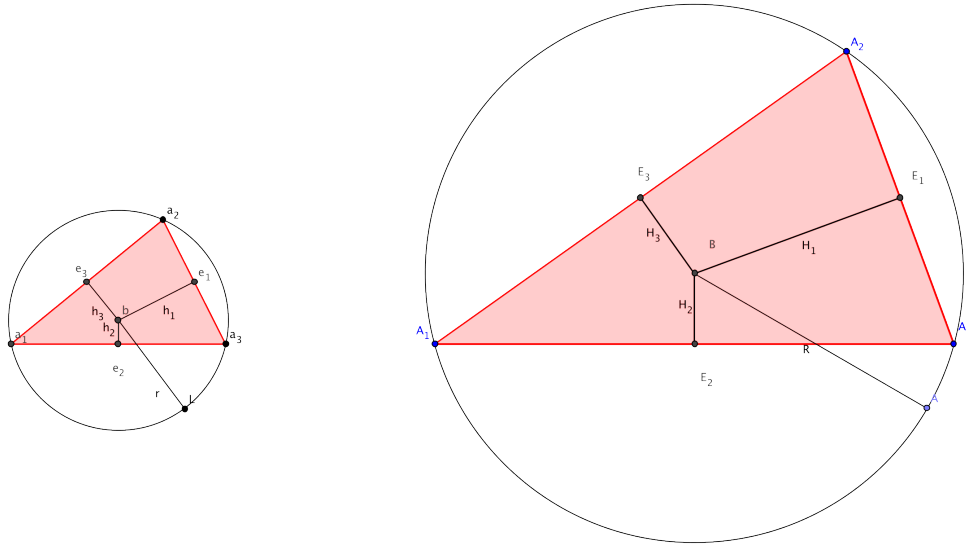


Figura 6: I due triangoli descritti con le rispettive circonferenze e con i rispettivi circocentri.

una mappa affine piecewise si procede con una triangolazione del dominio M in triangoli sufficientemente piccoli. Si considera quindi la triangolazione risultante in \mathbb{R}^3 prendendo l'immagine tramite f della triangolazione in M . Essendo f "short" i triangoli risultanti in \mathbb{R}^3 saranno più piccoli di quelli originali. Si tratta quindi di suddividere ulteriormente la triangolazione in M e definire una mappa piecewise affine che coincida con f sui vertici dei triangoli originali. L'elemento centrale della "costruzione-dimostrazione" è quello di immergere in \mathbb{R}^3 "piccoli" triangoli acutangoli scelti in maniera opportuna. Siano $T = \triangle(A_1, A_2, A_3)$ e $t = \triangle(a_1, a_2, a_3)$ due triangoli acuti, indichiamo con B, b i centri e con R, r i raggi delle rispettive circonferenze circoscritte. Siano $E_p = \frac{1}{2}A_k A_l, e_p = \frac{1}{2}a_k a_l$ con $p, k, l \in 1, 2, 3$ i rispettivi punti medi dei lati dei triangoli, indichiamo con $H_p = BE_p, h_p = be_p$ i segmenti che congiungono i punti medi al circocentro (fig.6).

Supponiamo che ogni lato di T sia più lungo del corrispondente lato di t ovvero

$$A_k A_l > a_k a_l$$

con $k, l \in \{1, 2, 3\} \quad k \neq l$

Consideriamo adesso un prisma in \mathbb{R}^3 con la base il triangolo t . Sul centro b dobbiamo trovare il punto B' tale che $B'a_p = R$. Sulla superficie laterale del prisma indichiamo i rispettivi punti E'_p, E'_k, E'_l tale che la linea spezzata

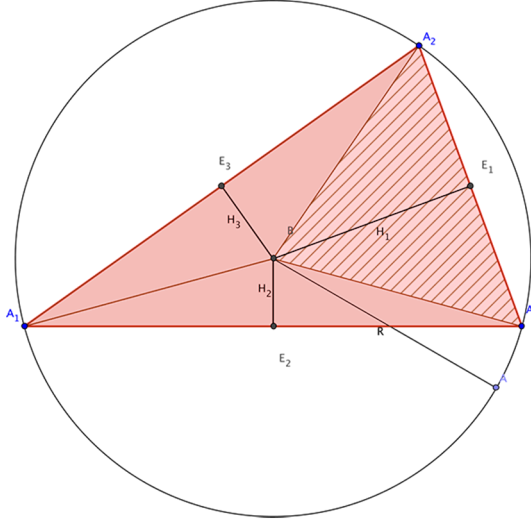


Figura 7: Il triangolo $\triangle(A_1, A_2, A_3)$ con la parte tratteggiata $\triangle(A_2E_1A_3B)$.

$a_k E'_p a_l$ abbia lunghezza pari a quella di $A_k A_l$ per ogni 3-pla di indici differenti $p, k, l \in \{1, 2, 3\}$.

Enunciamo e dimostriamo la proposizione per un certo senso “costruttiva” che ci dà la possibilità di immergere isometricamente in \mathbb{R}^3 triangoli acutangoli.

Proposizione 4.4. Se siamo nelle condizioni precedenti e in più valgono le disuguaglianze

$$H_p > h_p \quad \text{con } p \in \{1, 2, 3\} \quad (4.1)$$

allora esiste una immersione isometrica piecewise (lineare) che porta il triangolo T in \mathbb{R}^3 come superficie piegata inclusa nel prisma retto con base t , tale che il bordo A_k, A_l, A_p approssima la linea $a_k E'_p a_l E'_k a_p E'_l$.

Dimostrazione. Iniziamo considerando la parte “triangolare” $\triangle(A_2E_1A_3B)$ di T separatamente (fig.7). Piegando lungo la linea E_1B portiamo tale triangolo nel prisma in modo tale che la linea “spezzata” $A_2E_1A_3$ coincida con $a_2E'_1a_3$. Il segmento E_1B assumerà la posizione E'_1B'' . Dalla disuguaglianza 4.1 si ha che il segmento E'_1B'' interseca la linea $\lambda = bB'$ (λ è normale a t) ovvero

$$E'_1B'' \cap \lambda \neq \emptyset.$$

Lungo la linea a_2a_3 consideriamo due piani π_1 e π_2 (la linea a_2a_3 costituisce una traccia per i due piani) in modo tale che intersechino il segmento E'_1B''

e i punti su quest'ultimo siano ordinati così:

$$E'_1 \prec (E'_1 B'' \cap \pi_2) \prec (E'_1 B'' \cap \pi_1) \prec (E'_1 B'' \cap \lambda) \prec B''$$

Usando π_1 come piano di simmetria “riflettiamo” la parte triangolare piegata $a_k E'_p a_l B''$ che contiene B'' , poi “riflettiamo” attraverso π_2 la parte che si ottiene utilizzando il piano π_2 come piano di taglio, nuovamente riflettiamo in π_1 e in π_2 e così via. Dalla continuità i piani π_1 e π_2 possono essere scelti in modo tale che dopo un numero pari di riflessioni, B'' coinciderà esattamente con il punto B' . Quindi il triangolo $\triangle(A_k A_l B)$ è immerso isometricamente nel prisma sul triangolo $a_k a_l b$. Ripetendo tale costruzione per ogni parte triangolare $\triangle(A_k A_l B)$ $k, l \in \{1, 2, 3\}$ con $k \neq l$ otteniamo l'immersione voluta dell'intero triangolo T . \square

Osservazione 4.5. Si può osservare che scegliendo in maniera opportuna i piani π_1 e π_2 , le immagini dei triangoli $\triangle(A_k A_l B)$ non hanno punti in comune eccetto quelli dei lati in comune $A_k B$.

Dopo aver menzionato le idee principali della dimostrazione di Burago e Zalgaller, diamo un'altra dimostrazione rifacendoci al metodo utilizzato da Conti e Maggi nell'articolo [7]. Inizialmente proviamo una proposizione ed un lemma che ci saranno utili nella dimostrazione che segue.

Proposizione 4.6. Sia K un sottoinsieme convesso e compatto di \mathbb{R}^n e sia $x \notin K$. Allora esiste un unico $z \in K$ tale che

$$\|x - z\| = \min_{y \in K} \|x - y\| = \text{dist}(x, K);$$

$z = \pi(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow K$ si dice proiezione di x su K ed è caratterizzato dalla condizione

$$(x - z, y - z) \leq 0 \quad \forall y \in K \quad (4.2)$$

inoltre $\pi(x)$ è una mappa short e $\pi(x) = x$ se $x \in K$.¹⁰

Lemma 4.7. (*Lemma di estensione*) Sia R un convesso $\subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $f : R \rightarrow \mathbb{R}^m$ una mappa short. Allora esiste $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tale che $g = f$ su R e g è short.

Dimostrazione. Sia $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow R$ la proiezione come nella precedente proposizione. Possiamo andare a definire g come la composizione

$$g : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi} R \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$$

cioè $g(x) = f(\pi(x))$ e $g|_R = f$. \square

¹⁰Per i dettagli della dimostrazione si rimanda a [9]

Osservazione 4.8. Dal lemma 4.7 si può osservare che la g è ben definita in quanto la composizione di mappe short risulta essere short. Quindi se abbiamo una mappa short f definita su un convesso, ad esempio il foglio di carta che può essere quadrato o rettangolare, questa può essere estesa a tutto \mathbb{R}^n , mantenendo la sua proprietà di essere short.

Proposizione 4.9. Sia $u \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^3)$ tale che per qualche $\lambda_1 > 0$ si ha che

$$\lambda_1^2 \mathbb{I}_2 \leq Du^T Du. \quad (4.3)$$

Allora per ogni $\lambda_2 < \lambda_1$ esiste $l > 0$ tale che

$$\lambda_2 \|p - q\| \leq \|u(p) - u(q)\|$$

ogni qualvolta il segmento $[pq]$ è contenuto in Ω , $\|p - q\| \leq l$.

Dimostrazione. Dato che $\overline{\Omega}$ è chiuso e limitato in \mathbb{R}^n è anche compatto. Essendo Du continua su $\overline{\Omega}$, e anche uniformemente continua sullo stesso insieme cioè esiste $\omega : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ detto modulo di continuità tale che $\lim_{t \rightarrow 0^+} \omega(t) = 0$. Quindi si ha che,

$$f(p, q) = \frac{\|u(p) - u(q) - Du(p)(p - q)\|}{\|p - q\|} \leq \omega(\|p - q\|)$$

$\forall p, q \in \Omega$ e con $[pq] \subset \Omega$. Infine

$$\begin{aligned} \|u(p) - u(q)\| &\geq \|Du(p)(q - p)\| - \omega(\|p - q\|)\|p - q\| \\ &\geq (\lambda_1 - \omega(\|p - q\|))\|p - q\| \end{aligned}$$

Da questa ultima disuguaglianza si ha la tesi. \square

Osservazione 4.10. In particolare se u è tale che $Du \in O(3, 2)$ e

$$u_\delta = (1 - \delta)u$$

con

$$Du_\delta = (1 - \delta)Du$$

come nel caso che esamineremo successivamente, allora si ha che

$$(Du_\delta)^T Du_\delta = (1 - \delta)^2 (Du)^T Du = (1 - \delta)^2 \mathbb{I}_2 \quad (4.4)$$

in accordo con la (4.3) si sceglie $\lambda_1 = 1 - \delta$

Teorema 4.11. (Teorema di Burago Zalgaller “semplificato”) Sia R aperto limitato regolare (un insieme convesso) di \mathbb{R}^2 . Sia $u : R \rightarrow \mathbb{R}^3$ una mappa short (i.e. $\|u(p) - u(q)\| \leq \|p - q\| \quad \forall p, q \in R$). Allora $\forall \delta > 0 \quad \exists u_\delta : \overline{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, tale u_δ è un origami e si ha che $\|u_\delta - u\|_{L^\infty(\overline{R})} \leq \delta$.

Dimostrazione. Nel Teorema di Burago Zalgaller è data una mappa short u su un insieme R e la si vuole approssimare per mezzo di mappe origami nella convergenza uniforme. Ricordiamo che gli origami sono isometrie affini piecewise, affini su un numero finito di triangoli [cfr.sez.precedenti]. La dimostrazione verrà divisa in due parti: nella prima parte faremo vedere che basta restringerci al caso in cui u sia una isometria C^1 definita su un dominio più ampio di R ; nella seconda parte troveremo l'approssimazione della mappa short u per mezzo di mappe origami, costruendone la piega in maniera esplicita.

Sia $u : R \rightarrow \mathbb{R}^3$ una mappa short, utilizzando il Lemma 3.2, u può essere estesa ad una mappa $\tilde{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $R \subset\subset \Omega$.¹¹

Utilizzando il Teorema di Nash-Kuiper, possiamo trovare una mappa $\tilde{u}_\varepsilon \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ tale che $\|\tilde{u}_\varepsilon - \tilde{u}\|_{C^0} < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$ ¹² e tale che $D\tilde{u}_\varepsilon \in O(2, 3)$

A questo punto possiamo mostrare la costruzione “approssimante” per mappe isometriche C^1 . Sia $u \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ con $Du \in O(2, 3)$ e $R \subset\subset \Omega$.¹³ Per ogni $\delta \in (0, 1/2)$ possiamo andare a definire

$$u_\delta := (1 - \delta)u \quad (4.5)$$

La (4.5) rappresenta approssimativamente una contrazione affine. Per valutare di quanto tale u_δ differisce dall'essere una contrazione affine, si può andare ad introdurre un parametro $k > 1$ ¹⁴ e usando la proposizione 4.9 esiste un $l(u_\delta, k) > 0$ tale che

$$(1 - k\delta)\|p - q\| \leq \|u_\delta(p) - u_\delta(q)\| \leq (1 - \delta)\|p - q\| \quad (4.6)$$

per ogni $p, q \in \Omega$ tale che $\|p - q\| \leq l(u_\delta, k)$ e $[pq] \subset \Omega$.

Consideriamo una partizione di \mathbb{R}^2 in triangoli equilateri di lato l . Indichiamo con T_l la triangolazione definita da quelli che intersecano R .

Il lato l di ciascun triangolo equilatero verrà scelto in modo tale che $T_l \subset \Omega$ e che valga la (4.6) per ogni coppia di vertici di ogni coppia di triangoli di T_l che hanno un lato in comune, quindi si avrà che:

¹¹ $X \subset\subset \Omega$ significa che la chiusura di X è contenuta in Ω (i.e. $\overline{X} \subset \Omega$).

¹² \tilde{u}_ε può essere resa arbitrariamente vicina a \tilde{u} in $C^0(\Omega; \mathbb{R}^3)$

¹³ $Du \in O(2, 3)$ in generale non è costante.

¹⁴In quanto $1 - k\delta < 1 - \delta$ se $k > 1$ e quindi siamo nelle ipotesi della proposizione 4.9.

$$l \leq \min \left\{ \frac{1}{2}l(u_\delta, k), \delta, \text{dist}(R, \partial\Omega) \right\} \quad (4.7)$$

Possiamo definire la mappa origami v sui vertici di T_l imponendo che

$$v(a) = u_\delta(a) \text{ se } a \text{ è un vertice di } T_l \quad (4.8)$$

Se riusciamo a trovare una sottotriangolazione T di T_l possiamo andare a valutare v sui vertici di T che non sono vertici di T_l in modo tale che per ogni lato (r, s) di un triangolo di T si abbia:

$$\|v(r) - v(s)\| = \|r - s\| \quad (4.9)$$

Se quanto detto sopra vale è sufficiente definire v in ogni triangolo come un'estensione affine¹⁵ dei valori nei vertici per ottenere una mappa origami.

Le mappe v e u_δ sono 1-Lipschitziane cioè short su ogni triangolo e v coincide con u_δ sui vertici per costruzione e il diametro di ogni triangolo è limitato da l , quindi si ha :

$$\begin{aligned} \|v - u\|_{L^\infty(R; \mathbb{R}^3)} &\leq \|v - u_\delta\|_{L^\infty(R; \mathbb{R}^3)} + \|u_\delta - u\|_{L^\infty(R; \mathbb{R}^3)} \\ &\leq 2l + \delta \text{ diam}(R) \leq C_R \delta \end{aligned} \quad (4.10)$$

La terza disuguaglianza vale in quanto l è limitato da δ e infine dall'arbitrarietà di δ si ha la tesi. \square

Osservazione 4.12. Per concludere la dimostrazione del Teorema di Burago-Zalgaller dobbiamo far vedere che esiste un'opportuna sottotriangolazione di T_l in cui valga la (4.9) e troveremo inoltre una particolare piegatura che risolverà il nostro problema.

Per dimostrare quanto detto nell'Osservazione 4.12 iniziamo supponendo che u_δ sia una compressione affine (i.e. $u_\delta = (1 - \delta)u$) con u isometria affine cioè $u(x) = Ax + b$ con $A \in O(3, 2)$, costante e $b \in \mathbb{R}^3$, poi estenderemo questo argomento al caso generale di una qualsiasi isometria. La costruzione che ci porterà a ottenere la piegatura, e quindi la risoluzione del Teorema di Burago-Zalgaller, si suddivide in due parti e ciascuna di esse sarà effettuata localmente.

Inizialmente la mappa verrà modificata internamente senza cambiare il valore sul bordo. In tale processo il triangolo originale viene suddiviso in tre parti (tre triangoli) e si introduce un nuovo bordo interno. Successivamente

¹⁵Se T_j è un triangolo di T e $v : T_j \subset R \rightarrow \mathbb{R}^3$ allora $v = \sum_{i=1}^3 a_i v(i) \mid i = 1 \dots 3$ sono i vertici di T_j e $\sum_{i=1}^3 a_i = 1$

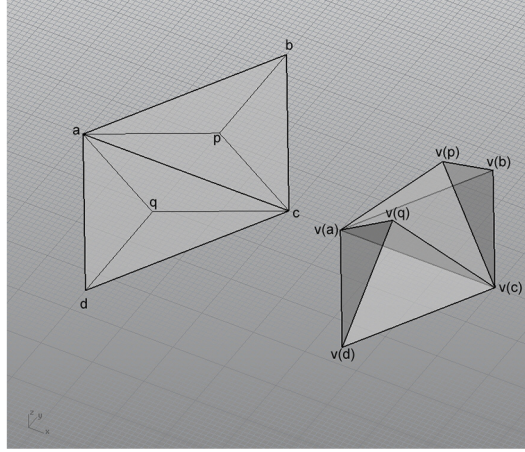


Figura 8: A sinistra due triangoli che provengono dalla triangolazione con i rispettivi centri, a destra le nuove posizioni di p e q

si rivolgerà ai lati originali dei triangoli mantenendo la funzione costante sul bordo di un opportuno quadrilatero. Questo approccio ci consente di considerare solo un numero limitato di punti in ogni parte della costruzione e di adattare la costruzione locale alla struttura locale della mappa u da approssimare. Tale approccio non sarebbe stato possibile utilizzando la mappa *Miura-Ori* descritta in precedenza in quanto essa presenta una struttura piuttosto “rigida” e poco modificabile localmente.

Iniziamo supponendo che la mappa u_δ sia una compressione uniforme cioè uguale a $(1 - \delta)$ volte un’isometria affine, ovvero

$$u_\delta = (1 - \delta)Ax \quad \text{con } A \in O(3, 2) \text{ costante e } \delta \in (0, 1/2). \quad (4.11)$$

Per approssimare tale u_δ con una mappa origami, inizialmente solleviamo il centro di ogni triangolo (fig.8) e successivamente si deve determinare un opportuno punto su ogni lato e sollevarlo per fare in modo che venga mantenuta la (4.9). Consideriamo il triangolo $[abc]$ e indichiamo con p il punto medio dalla (4.12) si ha che $v = u_\delta$ su a, b, c e dobbiamo determinare $v(p)$ imponendo che v riulti isometrica sui segmenti $[ap], [bp], [cp]$ cioè che

$$\|v(a) - v(p)\| = \|a - p\| \quad \text{analogamente per } b \text{ e } c \quad (4.12)$$

Dato che siamo nel caso particolare di una compressione affine, possiamo considerare punti della forma $v(p) = u_\delta(p) + \xi N$ con N la normale al piano definito da u_δ e $\xi > 0$.

Sostituendo nella (4.12) al posto di $v(a)$, $u_\delta(a)$ e al posto di $v(p)$ il valore suddetto in funzione di ξ abbiamo che :

$$\|u_\delta(a) - u_\delta(p)\|^2 + \xi^2 = \|a - p\|^2.$$

Dato che $\|u_\delta(a) - u_\delta(p)\|^2 = (1 - \delta)^2 \|a - p\|^2 = (1 - \delta)^2 l^2 / 3$ si ha che $\xi^2 = l^2 / 3 - (1 - \delta)^2 l^2 / 3 = (1 - (1 - \delta)^2) l^2 / 3 = (2\delta - \delta^2) l^2 / 3$. Abbiamo così ricavato $v(p)$ in funzione di δ e di l valore quest' ultimo che definisce la triangolazione equilatera iniziale. A questo punto il triangolo iniziale $[abc]$, verrà suddiviso nei tre sottotriangoli $[abp]$, $[bcp]$, $[cap]$ e la mappa v sarà ottenuta come estensione affine dei valori nei vertici (fig.8). Possiamo osservare che la mappa ottenuta non è short. Infatti se ad esempio andiamo a valutare la distanza di $v(p)$ dal punto medio di $[v(a)v(b)]$ questa è più lunga della distanza da p al punto medio di $[ab]$.

$$\|v(p) - v(m)\| > \|p - m\|; \quad (4.13)$$

dove con m e $v(m)$ si sono indicati rispettivamente i valori medi dei segmenti $[ab]$ e $[v(a)v(b)]$. A questo punto andiamo a considerare i lati originali della triangolazione iniziale. Consideriamo ad esempio il lato $[ac]$, che è comune ai due triangoli $[abc]$, $[adc]$ e indichiamo con p e q i rispettivi centri. Il nostro obiettivo è quello di trovare un punto $e \in [ac]$ e la sua immagine $v(e) \in \mathbb{R}^3$ in modo tale che:

$$\begin{aligned} \|v(e) - v(a)\| &= \|e - a\|, & \|v(e) - v(c)\| &= \|e - c\| \\ \|v(e) - v(p)\| &= \|e - p\|, & \|v(e) - v(q)\| &= \|e - q\| \end{aligned} \quad (4.14)$$

La condizione (4.14) implica che $v(e)$ appartiene al piano di simmetria tra $v(p)$ e $v(q)$, che contiene $v(a)$ e $v(c)$ (fig.9). A questo punto scriviamo e in funzione dei vertici a e c ; $e = \lambda c + (1 - \lambda)a$ e la rispettiva immagine $v(e) \in \mathbb{R}^3$ in funzione di $v(a)$ e $v(c)$; $v(e) = \eta v(c) + (1 - \eta)v(a) + \zeta N$ con λ, η e $\zeta \in \mathbb{R}$ da determinare. Sostituendo le espressioni trovate per e e per $v(e)$ in (4.14) e sviluppando, si ha che :

$$\|v(e) - v(a)\|^2 = \|\eta(v(c) - v(a)) + \zeta N\|^2 = \eta^2(1 - \delta)^2 l^2 + \zeta^2$$

$$\|v(e) - v(c)\|^2 = \|(1 - \eta)(v(a) - v(c)) + \zeta N\|^2 = (1 - \eta)^2(1 - \delta)^2 l^2 + \zeta^2$$

cioè

$$\eta^2(1 - \delta)^2 l^2 + \zeta^2 = \lambda^2 l^2 \quad (4.15)$$

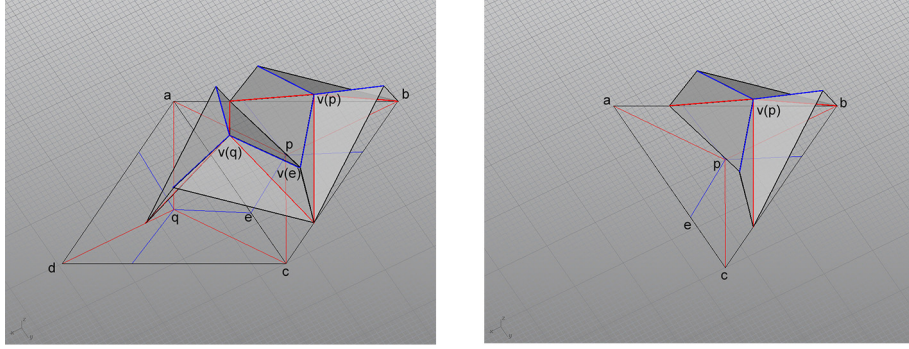


Figura 9: A sinistra due triangoli della triangolazione con il *crease pattern* e con la piegatura sovrastante, a destra particolare di un singolo triangolo.

$$(1 - \eta)^2(1 - \delta)^2 l^2 + \zeta^2 = (1 - \lambda)^2 l^2 \quad (4.16)$$

$$\left(\frac{1}{2} - \eta\right)^2 (1 - \delta)^2 l^2 + \frac{1}{12}(1 - \delta)^2 l^2 + (\zeta - \xi)^2 = \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)^2 l^2 + \frac{1}{12} l^2 \quad (4.17)$$

Sottraendo la (4.15) dalla (4.16) e dalla (4.17), con alcuni passaggi si ottiene una equazione di secondo grado in λ con parametro δ :

$$\lambda^2 - \lambda + \frac{4 - (1 - \delta)^2}{16} = 0 \quad (4.18)$$

L'equazione quadratica in λ ha due soluzioni:

$$\lambda_1 = \frac{1 + \delta}{4} \quad e \quad \lambda_2 = \frac{3 - \delta}{4}$$

Come si può osservare dalla (fig.10) per $\delta \in (0, 1)$ le due soluzioni λ_1 e λ_2 sono "abbastanza" distanti da 0 e da 1 rispettivamente.

Possiamo andare inoltre a valutare i valori per η e ζ che dipenderanno sempre da δ che andranno sostituiti nell'espressione di $v(e)$ ¹⁶,

¹⁶ $v(e) = \eta v(c) + (1 - \eta)v(a) + \zeta N$

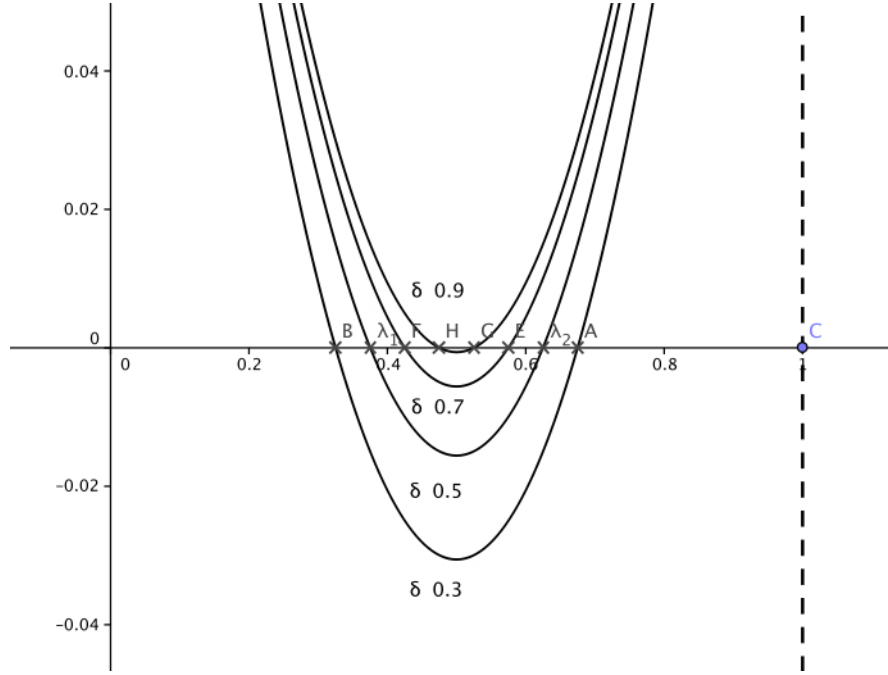


Figura 10: Equazione quadratica associata alle condizioni di isometria (4.14) per vari valori di $\delta \in (0, 1)$

$$\eta_1 = \frac{1 - 2\delta}{4 - 4\delta} \quad \eta_2 = \frac{3 - 2\delta}{4 - 4\delta} \quad e \quad \zeta_1 = \zeta_2 = \frac{3}{4}\xi = \frac{\sqrt{3}}{4}l\sqrt{2\delta - \delta^2} \quad (4.19)$$

Ora andiamo a considerare il caso di una generica u_δ , supponendo che la u dell'espressione:

$$u_\delta = (1 - \delta)u$$

non sia una isometria affine e che quindi, $Du(x) \in O(3, 2)$ possa variare al variare di x . Mostriamo che se k rimane sufficientemente vicino a 1 le proprietà descritte precedentemente si mantengono. Come nel caso precedente, concentriamo la nostra attenzione su un particolare triangolo $[abc]$ con centro p e supponiamo inoltre che $v = u_\delta$ sui vertici e, come nel caso precedente, dobbiamo capire dove si “posiziona” $v(p) \in \mathbb{R}^3$ che deve soddisfare la (4.12). La (4.12) implica che $v(p)$ dovrà appartenere all'intersezione di tre sfere in \mathbb{R}^3 .

$$v(p) \in \partial B\left(v(a), \frac{l}{\sqrt{3}}\right) \cap \partial B\left(v(b), \frac{l}{\sqrt{3}}\right) \cap \partial B\left(v(c), \frac{l}{\sqrt{3}}\right) \quad (4.20)$$

Nel caso precedente abbiamo mostrato che per $k = 1$ (contrazione affine) le condizioni precedenti identificano un singolo punto. Consideriamo ora un aperto A di \mathbb{R}^{9+3} e $F = F(v(a), v(b), v(c), v(p))$ l'applicazione da A in \mathbb{R}^3

$$F = \begin{cases} F_1 = (v(p)_x - v(a)_x)^2 + (v(p)_y - v(a)_y)^2 + (v(p)_z - v(a)_z)^2 - \frac{l^2}{3} \\ F_2 = (v(p)_x - v(b)_x)^2 + (v(p)_y - v(b)_y)^2 + (v(p)_z - v(b)_z)^2 - \frac{l^2}{3} \\ F_3 = (v(p)_x - v(c)_x)^2 + (v(p)_y - v(c)_y)^2 + (v(p)_z - v(c)_z)^2 - \frac{l^2}{3} \end{cases}$$

ricavata esplicitando la condizione (4.20). La F è di classe C^1 e i valori trovati nel caso precedente di isometria affine ($k = 1$)¹⁷, risolvono il sistema “associato”

$$F = F(v(a)_{k=1}, v(b)_{k=1}, v(c)_{k=1}, v(p)_{k=1}) = 0$$

e

$$\det \left(\frac{\partial(F_1, F_2, F_3)}{\partial(v(p)_x, v(p)_y, v(p)_z)}(v(a)_{k=1}, v(b)_{k=1}, v(c)_{k=1}, v(p)_{k=1}) \right) \neq 0.$$

Per il teorema del Dini esistono un intorno $I \subset \mathbb{R}^9$ di $(v(a)_{k=1}, v(b)_{k=1}, v(c)_{k=1})$, un intorno $J \subset \mathbb{R}^3$ di $v(p)_{k=1}$ ed un'unica funzione $G : I \rightarrow J$ con $G \in C^1$ tale che $G(v(a)_{k=1}, v(b)_{k=1}, v(c)_{k=1}) = v(p)_{k=1}$ e

$$F(v(a), v(b), v(c), G(v(a), v(b), v(c))) = 0 \quad \forall (v(a), v(b), v(c)) \in I$$

Detto in altri termini per $k - 1$ “piccolo” ci sarà una soluzione del sistema suddetto e quindi della (4.20) e $v(p)$ dipenderà in maniera continua da $v(a), v(b), v(c)$; ovvero

$$v(p) = G(v(a), v(b), v(c)) \tag{4.21}$$

A questo punto consideriamo un lato che è comune a due triangoli $[abc]$ e $[adc]$ con punti medi p e q rispettivamente. I punti $v(a), v(b), v(c)$ e $v(d)$ sono legati dalle condizioni

$$\left\{ \begin{array}{l} l(1 - k\delta) \leq \|v(a) - v(b)\| \leq l(1 - \delta) \\ l(1 - k\delta) \leq \|v(a) - v(c)\| \leq l(1 - \delta) \\ l(1 - k\delta) \leq \|v(b) - v(c)\| \leq l(1 - \delta) \\ l(1 - k\delta) \leq \|v(a) - v(d)\| \leq l(1 - \delta) \\ l(1 - k\delta) \leq \|v(c) - v(d)\| \leq l(1 - \delta) \\ \sqrt{3}l(1 - k\delta) \leq \|v(b) - v(d)\| \leq \sqrt{3}l(1 - \delta) \end{array} \right. \tag{4.22}$$

¹⁷Che chiameremo valori “rigidi” nel seguito della dimostrazione.

i punti medi p e q per quanto detto sopra andranno rispettivamente in $v(p)$ e $v(q)$ con

$$v(p) := G(v(a), v(b), v(c)), \quad v(q) := G(v(a), v(c), v(d)) \quad (4.23)$$

con G funzione continua. Anche in questo caso dobbiamo determinare un punto $e \in [ac]$ e la rispettiva immagine $v(e) \in \mathbb{R}^3$ imponendo che rispetti le condizioni di isometria (4.14). Mostriamo che il caso generale può essere ottenuto dal caso speciale valutato esplicitamente utilizzando un argomento di continuità. Consideriamo il problema in termini di coordinate cartesiane.

$$a = (0, 0), \quad c = (l, 0), \quad p = \left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2\sqrt{3}} \right), \quad q = \left(\frac{l}{2}, -\frac{l}{2\sqrt{3}} \right)$$

Dato che $\|v(a) - v(p)\| = \|v(c) - v(p)\| = \frac{l}{\sqrt{3}}$ analogamente per $v(q)$, possiamo scegliere un sistema di riferimento opportuno per risolvere il problema. Ad esempio possiamo supporre che:

$$v(a) = (0, 0, 0), \quad v(c) = (\alpha, 0, 0)l$$

$$v(p) = \left(\frac{\alpha}{2}, \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{\alpha^2}{4}}, 0 \right) l$$

$$v(q) = \left(\frac{\alpha}{2}, -\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{\alpha^2}{4}} \cos \phi, \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{\alpha^2}{4}} \sin \phi \right) l$$

con α e ϕ tali che $(1 - k\delta) \leq \alpha \leq (1 - \delta)$ e $\phi \in [0, 2\pi)$. A questo punto rimangono da determinare e e $v(e)$ che possiamo scrivere nel sistema scelto.

$$e = (\lambda l, 0) \text{ dove } \lambda \in (0, 1), \quad v(e) = (x, y, z)l$$

Anche in questo caso per determinare e e $v(e)$ dobbiamo imporre le condizioni (4.14) che sono equivalenti al sistema formato da quattro equazioni.

$$x^2 + y^2 + z^2 = \lambda^2 \quad (\|v(e) - v(a)\| = \|e - a\|)$$

$$(x - \alpha)^2 + y^2 + z^2 = (1 - \lambda)^2 \quad (\|v(e) - v(c)\| = \|e - c\|)$$

$$\left(x - \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(y - \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{\alpha^2}{4}}\right)^2 + z^2 = \frac{1}{3} - \lambda + \lambda^2 \quad (\|v(e) - v(p)\| = \|e - p\|)$$

$$\left(x - \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(y + \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{\alpha^2}{4}} \cos \phi\right)^2 + \left(z - \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{\alpha^2}{4}} \sin \phi\right)^2 = \frac{1}{3} - \lambda + \lambda^2$$

Da tale sistema di equazioni dobbiamo trovare una soluzione $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e $\lambda \in (0, 1)$. Dopo alcuni passaggi e sostituzioni, se $\sin \phi \neq 0$ determiniamo una soluzione per x, y e z

$$x = \frac{2\lambda - 1 + \alpha^2}{2\alpha}, \quad y = \frac{1 - \alpha^2}{4\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{\alpha^2}{4}}}, \quad z = \frac{1 + \cos \phi}{\sin \phi} y.$$

Osserviamo che solo la componente x di $v(e)$ dipende da λ quantità che dobbiamo determinare per ricavare e . Dopo alcune sostituzioni ricaviamo una relazione per λ :

$$\lambda^2 - \lambda + \frac{1 - \alpha^2}{4} + \frac{(2 + 2 \cos \phi)}{\sin^2 \phi} \frac{(1 - \alpha^2)\alpha^2}{16 \left(\frac{1}{3} - \frac{\alpha^2}{4}\right)} = 0 \quad (4.24)$$

tale relazione quadratica è una generalizzazione della equazione (4.18). Rimane da provare che, per k sufficientemente vicino ad 1, l'equazione precedente è una perturbazione continua di (4.18); inoltre si può far vedere che l'esistenza della soluzione e l'uniforme distanza da 0 e da 1 sono garantite. Dato che la (4.18) è un'equazione quadratica, in cui solo l'ultimo termine è non banale, rimane da provare che se δ e k soddisfano un appropriato dominio,

$$\frac{1 - \alpha^2}{4} + \frac{(2 + 2 \cos \phi)}{\sin^2 \phi} \frac{(1 - \alpha^2)\alpha^2}{16 \left(\frac{1}{3} - \frac{\alpha^2}{4}\right)} \quad (4.25)$$

è una “piccola” perturbazione di

$$\frac{4 - (1 - \delta)^2}{16}. \quad (4.26)$$

Sia $\varepsilon > 0$ e sia $k > 1 + \varepsilon$, cioè $v(a), v(b), v(c)$ e $v(d)$ si troveranno in un intorno della loro posizione rigida¹⁸. Quindi α che è limitato (i.e. $(1 - k\delta) \leq \alpha \leq (1 - \delta)$) tenderà a $1 - \delta$; ϕ che appartiene all'intervallo $[0, 2\pi)$ tenderà al valore trovato nel caso rigido; $v(p)$ e $v(q)$ che sono legati a $v(a), v(b), v(c)$ e $v(d)$ per mezzo della funzione continua G si troveranno in un intorno della loro posizione rigida. Questo prova che in un intorno di $k - 1$ il valore (4.25) subirà una piccola variazione intorno al valore (4.26) e quindi troveremo sempre una soluzione λ vicino a quella ottenuta nel caso rigido.

Osservazione 4.13. La vicinanza o meno di k a 1 può dipendere da δ ma non da l . Come possiamo osservare dalla dimostrazione del teorema, ogni passaggio viene effettuato localmente nel senso che la funzione viene

¹⁸Alla posizione “rigida” corrispondono i valori trovati nel caso di compressione affine.

modificata in una piccola regione, senza modificarla altrove. Quindi ciò ci consente di applicare tale procedimento a tutta la griglia, eccetto per i lati che si trovano lungo la frontiera di Ω_T visto che non sono presenti triangoli vicini. Tali triangoli verranno tagliati (eliminati) dalla costruzione. Dato che l è stato scelto in modo tale che si mantenga la (4.7), la griglia risultante ricoprirà R ovvero l'intero foglio di carta.

Riferimenti bibliografici

- [1] R.C. Alperin, *A mathematical theory of origami constructions and numbers*, New York J. Math. **6** (2000), 119-133
- [2] A. Caserta, *Matematica e geometria con un foglio di carta*, Progetto Alice **34** (2011), 51-75
- [3] J.Nash *C^1 -isometric imbeddings*, Annals of Mathematics **60** (1954), 383-396
- [4] N.H. Kuiper, *On C^1 -isometric imbeddings I*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. **58** (1955), 545-556
- [5] M.Gromov, *Partial differential relations*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [6] Erik D. Demaine, Martin L. Demaine, John Iacono, Stefan Langerman *Wrapping spheres with Flat Paper*, 2008
- [7] S.Conti, F.Maggi *Confining Thin Elastic Sheets and Folding Paper*, Arch. Rational Mech. Anal **187** (2008) 1-48
- [8] Yu.D.Burago, V.A. Zalgaller *Isometric Piecewise Linear Immersions of Two-Dimensional Manifolds with Polyhedral metrics into \mathbb{R}^3* , St.Petersburg Math.J. **7** (1996)
- [9] R.Magnanini, *Dispense del Corso di Istituzioni di Analisi Superiore*, (2009)
- [10] B.Dacorogna, P.Marcellini, E.Paolini, *Lipschitz-continuous local isometric immersions: rigid maps and origami*, (2010)
- [11] T.Hull, *On the mathematics of flat origamis*, Congressus Numerantium **100** (1994) 215-224
- [12] R.J.Lang, *Origami Design Secret: Mathematical Methods for an Ancient Art*, Paperback (2003)
- [13] T.Hull, *Project Project origami: Activities for exploring mathematics*, Wellesley, MA: A K Peters (2009)
- [14] Z.Y.Wei, Z.V.Guo, L.Dudte, H.Y. Liang, L. Mahadevan *Geometric Mechanics of periodic pleated Origami*, Preprints (2012)

- [15] Manfredo P. Do Carmo *Differential Geometry of Curves and Surfaces*,
Paperback (1976)
- [16] P.R. Halmos *A Hilbert Space Problem Book*,
Springer-Verlag (1982)
- [17] Erik D. Demaine, Joseph O'Rourke *Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra*,
Cambridge University Press (2008)