Il Determinante Jacobiano per Mappe Singolari

Candidato: G. de Philippis Relatore: Dott. E.Paolini

Firenze, 15 Ottobre 2009

Formule di cambiamento di variabile

Se $u\colon \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è Lipschitziana

Formula dell'area non-orientata

$$\int_\Omega |\det Du(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^n} N(u,\Omega,y) dy$$

Formula dell'area orientata

$$\int_\Omega \det Du(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \deg(u,\Omega,y) dy$$

dove:

- $N(u,\Omega,y) = \#\{u^{-1}(y) \cap \Omega\}$
- $\deg(u,\Omega,y)$= grado di Brouwer

Mappe di Sobolev

E se $u \in W^{1,p}(\Omega)$?

- Se $p \geq n \Rightarrow \det Du \in L^1 \Rightarrow$ essenzialmente stesse proprietà mappe lisce
- Se $p < n$ in generale $\det Du \notin L^1$
- Se $p < n$ e $\det Du \in L^1$ NON si conservano le proprietà delle mappe lisce

Mappe di Sobolev

E se $u \in W^{1,p}(\Omega)$?

- Se $p \geq n \Rightarrow \det Du \in L^1 \Rightarrow$ essenzialmente stesse proprietà mappe lisce
- Se $p < n$ in generale $\det Du \notin L^1$
- Se $p < n$ e $\det Du \in L^1$ NON si conservano le proprietà delle mappe lisce

Mappe di Sobolev

E se $u \in W^{1,p}(\Omega)$?

- Se $p \geq n \Rightarrow \det Du \in L^1 \Rightarrow$ essenzialmente stesse proprietà mappe lisce
- Se $p < n$ in generale $\det Du \notin L^1$
- Se $p < n$ e $\det Du \in L^1$ NON si conservano le proprietà delle mappe lisce

Mappe di Sobolev

E se $u \in W^{1,p}(\Omega)$?

- Se $p \geq n \Rightarrow \det Du \in L^1 \Rightarrow$ essenzialmente stesse proprietà mappe lisce
- Se $p < n$ in generale $\det Du \notin L^1$
- Se $p < n$ e $\det Du \in L^1$ NON si conservano le proprietà delle mappe lisce

Null Lagrangem

Se $u, v : \Omega \to \mathbb{R}^n$ sono regolari e $u = v$ su $\partial\Omega$ allora

$$\int_\Omega \det Du = \int_\Omega \det Dv$$

Il determinante jacobiano è un *Null Lagrangem*.

Null Lagrangem

Se $u, v : \Omega \to \mathbb{R}^n$ sono regolari e $u = v$ su $\partial\Omega$ allora

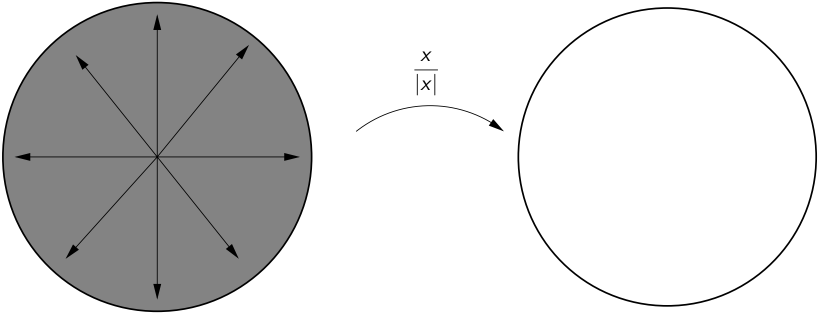
$$\int_\Omega \det Du = \int_\Omega \det Dv$$

Il determinante jacobiano è un *Null Lagrangem*.

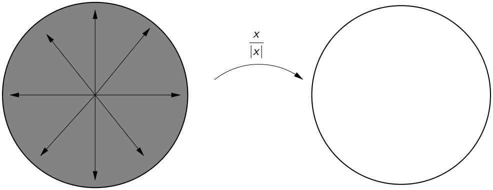
$\deg(u, \Omega, y)$ dipende solo da $u \llcorner \partial\Omega$.

La mappa $\frac{x}{|x|}$

Consideriamo $u \colon B \to \mathbb{S}^{n-1}$:



La mappa $\frac{x}{|x|}$

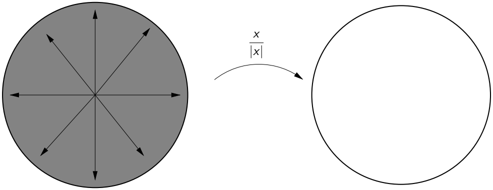


Allora:

- $u \in W^{1,p}(B)$ per ogni $p < n$
- $Du \colon \mathbb{R}^n \to T_{\frac{x}{|x|}}\mathbb{S}^{n-1} \simeq \mathbb{R}^{n-1}$
- $\det Du = 0$ quasi ovunque
- Se v è regolare e $v = u$ su ∂B:

$$|B| = \int \det Dv \neq \int \det Du = 0$$

La mappa $\frac{x}{|x|}$

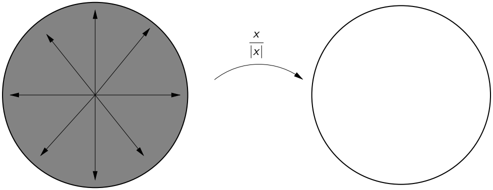


Allora:

- $u \in W^{1,p}(B)$ per ogni $p < n$
- $Du\colon \mathbb{R}^n \to T_{\frac{x}{|x|}}\mathbb{S}^{n-1} \simeq \mathbb{R}^{n-1}$
- $\det Du = 0$ quasi ovunque
- Se v è regolare e $v = u$ su ∂B:

$$|B| = \int \det Dv \neq \int \det Du = 0$$

La mappa $\frac{x}{|x|}$

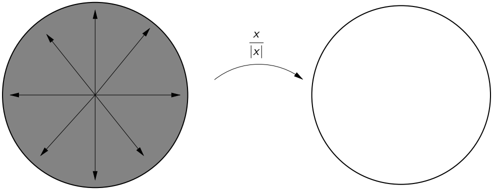


Allora:

- $u \in W^{1,p}(B)$ per ogni $p < n$
- $Du\colon \mathbb{R}^n \to T_{\frac{x}{|x|}}\mathbb{S}^{n-1} \simeq \mathbb{R}^{n-1}$
- $\det Du = 0$ quasi ovunque
- Se v è regolare e $v = u$ su ∂B:

$$|B| = \int \det Dv \neq \int \det Du = 0$$

La mappa $\frac{x}{|x|}$



Allora:

- $u \in W^{1,p}(B)$ per ogni $p < n$
- $Du \colon \mathbb{R}^n \to T_{\frac{x}{|x|}}\mathbb{S}^{n-1} \simeq \mathbb{R}^{n-1}$
- $\det Du = 0$ quasi ovunque
- Se v è regolare e $v = u$ su ∂B:

$$|B| = \int \det Dv \neq \int \det Du = 0$$

Continuità

Consideriamo

$$u_k \rightharpoonup u \text{ in } W^{1,p}(\Omega)$$

- Se $p > n$ allora $\det Du_k \rightharpoonup \det Du$ in $L^{\frac{p}{n}}(\Omega)$
- Se $p = n$ allora $\det Du_k \overset{*}{\rightharpoonup} \det Du$ in $\mathcal{M}(\Omega)$
- Se $p < n \longrightarrow$ Nessun tipo di continuità.

Continuità

Consideriamo

$$u_k \rightharpoonup u \text{ in } W^{1,p}(\Omega)$$

- Se $p > n$ allora $\det Du_k \rightharpoonup \det Du$ in $L^{\frac{p}{n}}(\Omega)$
- Se $p = n$ allora $\det Du_k \overset{*}{\rightharpoonup} \det Du$ in $\mathcal{M}(\Omega)$
- Se $p < n \longrightarrow$ Nessun tipo di continuità.

Continuità

Consideriamo

$$u_k \rightharpoonup u \text{ in } W^{1,p}(\Omega)$$

- Se $p > n$ allora $\det Du_k \rightharpoonup \det Du$ in $L^{\frac{p}{n}}(\Omega)$
- Se $p = n$ allora $\det Du_k \overset{*}{\rightharpoonup} \det Du$ in $\mathcal{M}(\Omega)$
- Se $p < n \longrightarrow$ Nessun tipo di continuità.

Continuità

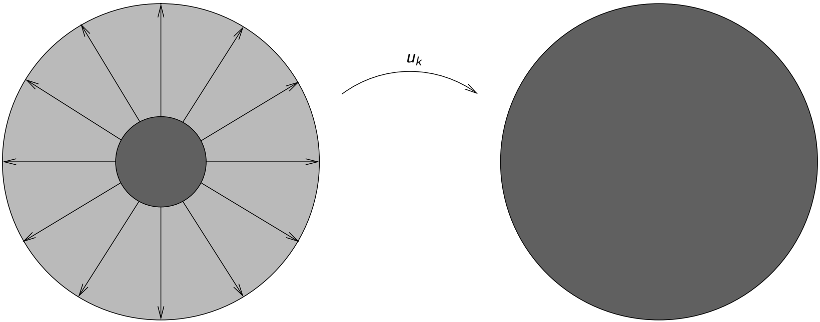
Consideriamo

$$u_k \rightharpoonup u \text{ in } W^{1,p}(\Omega)$$

- Se $p > n$ allora $\det Du_k \rightharpoonup \det Du$ in $L^{\frac{p}{n}}(\Omega)$
- Se $p = n$ allora $\det Du_k \overset{*}{\rightharpoonup} \det Du$ in $\mathcal{M}(\Omega)$
- Se $p < n \longrightarrow$ Nessun tipo di continuità.

Sia $u(x) = \frac{x}{|x|}$ e:

$$u_k(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{se } \frac{1}{k} \leq |x| \leq 1 \\ kx & \text{se } |x| \leq \frac{1}{k} \end{cases}$$



Contnuità

Allora $u_k \to u$ in $W^{1,p}(B)$ ma:

$$|B| = \int_B \det Du_k \not\to \int_B \det Du = 0.$$

Contnuità

Allora $u_k \to u$ in $W^{1,p}(B)$ ma:

$$|B| = \int_B \det Du_k \nrightarrow \int_B \det Du = 0.$$

Il determinante jacobiano *puntuale* non tiene conto della frattura nell'immagine di u!

Semicontinuità

Studiamo la semicontinuità:

- Se $p \geq n$ allora

$$u \mapsto TV(u) := \int_\Omega |\det Du|$$

è semicontinuo inferiormente
- Se $p < n$? $\longrightarrow$ NO!

Semicontinuità

Studiamo la semicontinuità:

- Se $p \geq n$ allora

$$u \mapsto TV(u) := \int_\Omega |\det Du|$$

  è semicontinuo inferiormente
- Se $p < n$? $\longrightarrow$ NO!

Semicontinuità

Studiamo la semicontinuità:

- Se $p \geq n$ allora

$$u \mapsto TV(u) := \int_\Omega |\det Du|$$

  è semicontinuo inferiormente
- Se $p < n$? $\longrightarrow$ NO!

Esempio

Consideriamo $u\colon Q \to \mathbb{R}^n$ regolare.
Esiste una successione $u_r \rightharpoonup u \in W^{1,p}$ che soddisfa

$$\int |\det Du_r| = 0.$$

Esempio

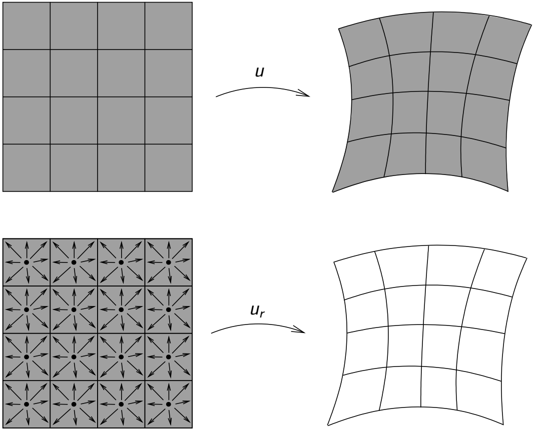
Consideriamo $u\colon Q \to \mathbb{R}^n$ regolare.
Esiste una successione $u_r \rightharpoonup u \in W^{1,p}$ che soddisfa

$$\int |\det Du_r| = 0.$$

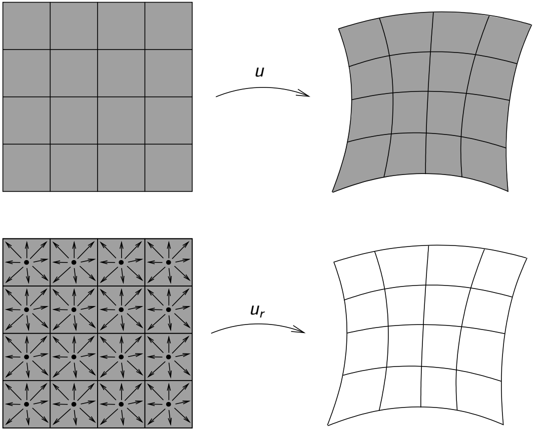
$$\Downarrow$$

Nessuna speranza di semicontinuità se $\det Du \neq 0$.

Esempio



Esempio



Ancora una volta $\det Du_r$ non tiene conto delle "fratture"!

Soluzioni

Esistono due possibili soluzioni:

Esistono due possibili soluzioni:

- Determinante distribuzionale (Integrazione per parti)
- Variazione totale rilassata (Rilassamento)

Soluzioni

Esistono due possibili soluzioni:

- Determinante distribuzionale (Integrazione per parti)
- Variazione totale rilassata (Rilassamento)

Soluzioni

Esistono due possibili soluzioni:

- Determinante distribuzionale (Integrazione per parti)
- Variazione totale rilassata (Rilassamento)

Non sempre coincidono!

Il Determinante Distribuzionale

Il determinante jacobiano è una divergenza:

$$\det Du = -\frac{1}{n}\,\mathrm{div}(u\,\mathrm{adj}\,Du)$$

Il Determinante Distribuzionale

Il determinante jacobiano è una divergenza:

$$\det Du = -\frac{1}{n}\operatorname{div}(u \operatorname{adj} Du)$$

definiamo la distribuzione:

$$\langle \operatorname{Det} Du, \varphi \rangle := -\frac{1}{n}\int_\Omega u \operatorname{adj} Du \cdot D\varphi$$

Il Determinante Distribuzionale

Il determinante jacobiano è una divergenza:

$$\det Du = -\frac{1}{n}\operatorname{div}(u \operatorname{adj} Du)$$

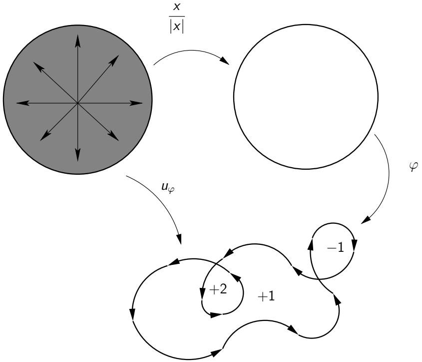
definiamo la distribuzione:

$$\langle \operatorname{Det} Du, \varphi \rangle := -\frac{1}{n}\int_\Omega u \operatorname{adj} Du \cdot D\varphi$$

Ben definita se $u \in W^{1,p} \cap L^\infty$ con $n - 1 < p < n$.

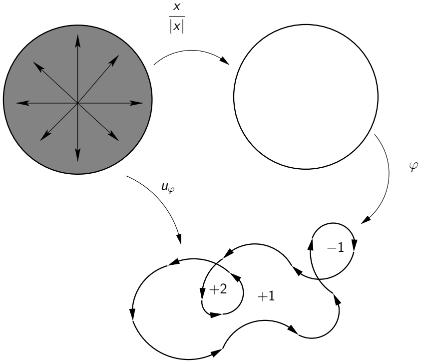
Mappe zero-omogenee

Data $\varphi\colon \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ consideriamo $u_\varphi(x) = \varphi\left(\frac{x}{|x|}\right)$:



Mappe zero-omogenee

Data $\varphi\colon \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ consideriamo $u_\varphi(x) = \varphi\left(\frac{x}{|x|}\right)$:

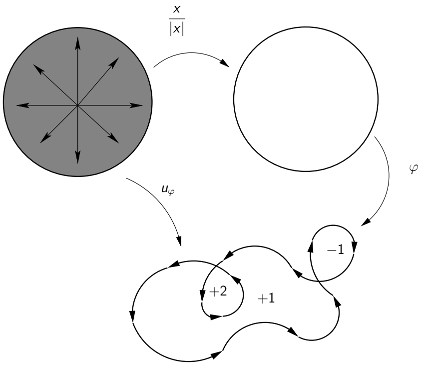


Allora:

$$\mathrm{Det}\, Du_\varphi = \{\text{Somma aree orientate}\} \times \delta_0$$

Mappe zero-omogenee

Data $\varphi\colon \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ consideriamo $u_\varphi(x) = \varphi\left(\frac{x}{|x|}\right)$:



Non sempre Det Du è una misura di Radon

Variazione totale rilassata

Data $u \in W^{1,p}(\Omega)$ definiamo per $p \in (n-1, n)$:

$$TV_w^p(u,\Omega) = \inf\{\liminf_{k\to\infty} \int_\Omega |\det Du_k| : \; u_k \in W^{1,n}, u_k \rightharpoonup u \text{ in } W^{1,p}\}$$

Variazione totale rilassata

Data $u \in W^{1,p}(\Omega)$ definiamo per $p \in (n-1, n)$:

$$TV_w^p(u,\Omega) = \inf\{\liminf_{k\to\infty} \int_\Omega |\det Du_k| : \; u_k \in W^{1,n}, u_k \rightharpoonup u \text{ in } W^{1,p}\}$$

Se $u \in W^{1,n}$ si può provare:

$$TV_w^p(u,\Omega) = \int_\Omega |\det Du|$$

Variazione totale rilassata

Data $u \in W^{1,p}(\Omega)$ definiamo per $p \in (n-1, n)$:

$$TV_w^p(u, \Omega) = \inf\{\liminf_{k\to\infty} \int_\Omega |\det Du_k| : \; u_k \in W^{1,n}, u_k \rightharpoonup u \text{ in } W^{1,p}\}$$

Se $u \in W^{1,n}$ si può provare:

$$TV_w^p(u, \Omega) = \int_\Omega |\det Du|$$

Questo è data da un risultato di semicontinuità non banale e valido solo per $p \in (n-1, n)$

TV vs Det Du

Confronto tra TV e Det Du

- se $TV_w^p(u,\Omega) < \infty$ allora $TV_w^p(u,\cdot)$ è (quasi) una misura
- se $TV_s^p(u,\Omega) < \infty$ allora Det Du è una misura e $|\operatorname{Det} Du|(\cdot) \leq TV_w^p(u,\cdot)$

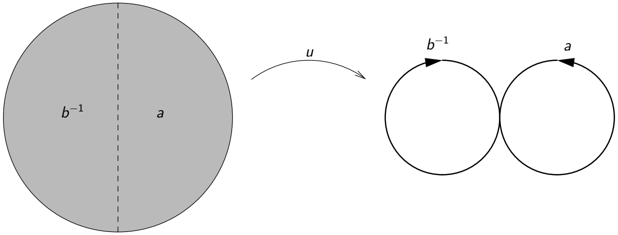
Confronto tra TV e Det Du

- se $TV^p_w(u,\Omega) < \infty$ allora $TV^p_w(u,\cdot)$ è (quasi) una misura
- se $TV^p_s(u,\Omega) < \infty$ allora Det Du è una misura e $|\operatorname{Det} Du|(\cdot) \leq TV^p_w(u,\cdot)$

Può accadere che $|\operatorname{Det} Du| < TV$

Esempio: la curva a “otto” I

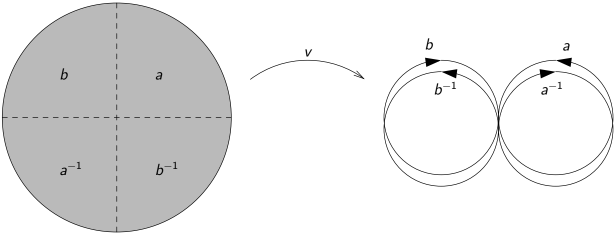
Sia $u(x) = \varphi\left(\frac{x}{|x|}\right)$ con $\varphi \sim ab^{-1}$



$$\mathrm{Det}\, Du = 0 \qquad TV(u, B) = 2\pi$$

Esempio: la curva a “otto” II

Sia $v(x) = \psi\left(\frac{x}{|x|}\right)$ con $\psi \sim aba^{-1}b^{-1}$



$$\text{Det } Dv = 0 \qquad TV(v, B) = 2\pi$$

Casi di uguaglianza

Teorema (Mappe a valori in sfere)

Sia $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{S}^{n-1})$ *tale che* $TV_w^p(u, \Omega) < \infty$ *allora, per (quasi) ogni aperto* $A \subseteq \Omega$ *abbiamo:*

$$|\operatorname{Det} Du|(A) = TV_w^p(A)$$

Casi di uguaglianza

Teorema (Mappe che "preservano" l'orientazione)

Sia $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty$, $p \in (n-1, n)$ *e supponiamo che:*

1. $n \geq 3$;
2. $TV(u, \Omega) < \infty$;
3. $u \in WOP$;
4. *esiste un rappresentante di* u *continuo per quasi ogni* $x \in \Omega$.

Allora

1. $\operatorname{Det} Du$ *è una distribuzione positiva*
2. *Per (quasi) ogni aperto* A*:*

$$\operatorname{Det} Du(A) = TV_w^p(A)$$

Teorema di struttura per mappe a valori in sfere

Teorema

Sia $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{S}^{n-1})$, $p \in (n-1, n)$ *e tale che* $\operatorname{Det} Du$ *è una misura, allora:*

$$\operatorname{Det} Du = \omega_n \sum_{i=1}^{m} d_i \delta_{x_i}$$

dove

- $d_i = \deg(u, \partial B(x_i, r_i), \mathbb{S}^{n-1})$
- x_i *sono le "singolarità topologiche" di* u

Teorema di struttura per mappe a valori in sfere

Teorema

Sia $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{S}^{n-1})$, $p \in (n-1, n)$ *e tale che* $\operatorname{Det} Du$ *è una misura, allora:*

$$\operatorname{Det} Du = \omega_n \sum_{i=1}^{m} d_i \delta_{x_i}$$

dove

- $d_i = \deg(u, \partial B(x_i, r_i), \mathbb{S}^{n-1})$
- x_i *sono le "singolarità topologiche" di* u

Teorema di struttura per mappe a valori in sfere

Teorema

Sia $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{S}^{n-1})$, $p \in (n-1, n)$ *e tale che* $\operatorname{Det} Du$ *è una misura, allora:*

$$\operatorname{Det} Du = \omega_n \sum_{i=1}^{m} d_i \delta_{x_i}$$

dove

- $d_i = \deg(u, \partial B(x_i, r_i), \mathbb{S}^{n-1})$
- x_i *sono le "singolarità topologiche" di* u

Mappe a valori in $\mathbb{S}^{n-1}$

Schema di dimostrazione

- Il teorema è vero per mappe zero-omogenee
- Approssimiamo u con mappe u_k a valori in $\mathbb{S}^{n-1}$ lisce tranne che in un numero finito di punti
- I punti singolari delle u_k son esattamente quanti le singolarità topologiche di u e

$$\deg(u_k) = \deg(u)$$

vicino alle singolarità

- Modifichiamo le mappe in modo da renderle zero omogenee vicino alle singolarità

Mappe a valori in $\mathbb{S}^{n-1}$

Schema di dimostrazione

- Il teorema è vero per mappe zero-omogenee
- Approssimiamo u con mappe u_k a valori in $\mathbb{S}^{n-1}$ liscie tranne che in un numero finito di punti
- I punti singolari delle u_k son esattamente quanti le singolarità topologiche di u e

$$\deg(u_k) = \deg(u)$$

vicino alle singolarità
- Modifichiamo le mappe in modo da renderle zero omogenee vicino alle singolarità

Schema di dimostrazione

- Il teorema è vero per mappe zero-omogenee
- Approssimiamo u con mappe u_k a valori in $\mathbb{S}^{n-1}$ liscie tranne che in un numero finito di punti
- I punti singolari delle u_k son esattamente quanti le singolarità topologiche di u e

$$\deg(u_k) = \deg(u)$$

vicino alle singolarità
- Modifichiamo le mappe in modo da renderle zero omogenee vicino alle singolarità

Schema di dimostrazione

- Il teorema è vero per mappe zero-omogenee
- Approssimiamo u con mappe u_k a valori in $\mathbb{S}^{n-1}$ liscie tranne che in un numero finito di punti
- I punti singolari delle u_k son esattamente quanti le singolarità topologiche di u e

$$\deg(u_k) = \deg(u)$$

  vicino alle singolarità
- Modifichiamo le mappe in modo da renderle zero omogenee vicino alle singolarità

Teorema WOP

Teorema (Mappe che "preservano" l'orientazione)

Sia $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty$, $p \in (n-1, n)$ *e supponiamo che:*

1. $n \geq 3$;
2. $TV(u, \Omega) < \infty$;
3. $u \in WOP$;
4. *esiste un rappresentante di* u *continuo per quasi ogni* $x \in \Omega$.

Allora

1. $\operatorname{Det} Du$ *è una distribuzione positiva*
2. *Per (quasi) ogni aperto* A*:*

$$\operatorname{Det} Du(A) = TV_w^p(A)$$

Definizione (Grado di Brouwer per mappe discontinue)

Sia $u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap L^\infty$, $p \in (n-1, n)$ definiamo, per ogni $D \subset\subset \Omega$ con bordo lipschitziano $\mathrm{Deg}(u, D, y)$ come l'unica funzione $BV(\mathbb{R}^n, \mathbb{Z})$ tale che per ogni campo $g \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) \cap W^{1,\infty}$ si ha:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{Deg}(u, D, y) \operatorname{div} g(y) dy = \int_{\partial D} g(u(x)) \operatorname{adj} Du \cdot \nu_{\partial D} d\mathcal{H}^{n-1}$$

Grado distribuzionale e *WOP*

Definizione (WOP)

Diremo che una mappa $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *conserva l'orientazione in senso debole* e scriveremo $u \in WOP(\Omega)$ se per ogni $x \in \Omega$ e per quasi ogni raggio r abbiamo

$$\mathrm{Deg}(u, B(x,r), y) \geq 0.$$

Proposizione

Sia $u \in WOP(\Omega) \cap W^{1,p} \cap L^\infty$ *allora:*

1. Det *Du è una misura di Radon positiva*
2. *Per ogni* x *e quasi ogni* r*:*

$$\operatorname{Det} Du(B(x,r)) = \int_{R^n} \operatorname{Deg}(u, B(x,r), y)dy$$

Teorema di White

Teorema (White)

Sia $k \geq n \geq 3$ *e* $f : \partial B(0,1) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ *una mappa lipschitziana, allora:*

$$\min\{\mathbb{M}(T),\ T \in \mathcal{R}^n(\mathbb{R}^k)\ \partial T = f_\# [\![\partial B]\!]\}$$
$$= \inf\{\int_B J_n g(x) dx,\ g\colon B \to \mathbb{R}^k,\ g \textit{ lipschitziana},\ g \llcorner \partial B = f\}$$

dove $J_n g = \sqrt{\det Dg^T Dg}$ *è il jacobiano n-dimensionale.*

Teorema di White

Corollario

Sia $u\colon B \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *regolare dove* B *è una palla,* $n \geq 3$, *allora per ogni* $\sigma > 0$ *esiste una mappa* $g\colon B \to \mathbb{R}^n$ *lipschitziana* $g = u$ *su* ∂B *tale che:*

$$\int_B |\det Dg(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\deg(u, B, y)| dy + \sigma.$$

Schema di dimostrazione

- Si usa Besicovitch e ci si riduce a quadrati
- Si "buca" l'immagine di u
- Si tappano i buchi in maniera "ottimale" usando il teorema di White

Dimostrazione del teorema *WOP*

Schema di dimostrazione

- Si usa Besicovitch e ci si riduce a quadrati
- Si "buca" l'immagine di u
- Si tappano i buchi in maniera "ottimale" usando il teorema di White

Dimostrazione del teorema *WOP*

Schema di dimostrazione

- Si usa Besicovitch e ci si riduce a quadrati
- Si "buca" l'immagine di u
- Si tappano i buchi in maniera "ottimale" usando il teorema di White

Mappe debolmente monotone

Definizione

Sia $u \in W^{1,p}(B(x,r) \cap W^{1,p}(\partial B(x,r))$ definiamo per ogni raggio tale che $u \llcorner B(x,r)$ è continua:

$$\mathrm{Im}_T(u, B(x,r)) = \{y \in R^n \setminus u(\partial B(x,r)) : \ \mathrm{Deg}(u, B(x,r), y) \neq 0\}$$

Definizione

Diremo che una mappa $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ è *debolmente monotona* se vale per quasi ogni $r \in (0, \mathrm{dist}(x, \partial\Omega))$:

$$u(z) \in \mathrm{Im}_T(u, (B(x,r)) \cup u(\partial B(x,r)) \quad \text{per quasi ogni } z \in B(x,r).$$

Mappe debolmente monotone

Teorema

Sia $u \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^n)$, $p > n-1$ *una mappa debolmente monotona che soddisfa WOP, allora esiste un rappresentante* u^* *di* u *ed un insieme* NC *tale che* u^* *è continua in ogni* $x \in \Omega \setminus NC$, *inoltre* $\dim_{\mathcal{H}} NC \leq n - p$

Mappe debolmente monotone

Teorema

Sia $u \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^n)$, $p > n-1$ *una mappa debolmente monotona che soddisfa WOP, allora esiste un rappresentante* u^* *di* u *ed un insieme* NC *tale che* u^* *è continua in ogni* $x \in \Omega \setminus NC$, *inoltre* $\dim_{\mathcal{H}} NC \leq n-p$

In particolare le mappe debolmente monotone soddisfano tutte le ipotesi del teorema *WOP*