Curve e integrali curvilinei

E. Paolini

13 ottobre 2014

1 curve parametrizzate

Una *curva parametrizzata* è una funzione $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Al variare di t nell'intervallo $[a,b]$ (con $a < b$) il punto $\gamma(t)$ descrive una traiettoria nello spazio $\mathbb{R}^n$. I punti $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$ si chiamano *estremi* della curva. Se $\gamma(a) = \gamma(b)$ la curva si dice essere *chiusa*. L'immagine della funzione γ si indica con $[\gamma]$

curva parametrizzata
estremi
curve chiuse
supporto

$$[\gamma] = f([a,b]) \subset \mathbb{R}^n$$

e si chiama *supporto della curva*.

Esempio 1.1 *(il segmento).* Dati due punti $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ si può definire il segmento di retta che congiunge $\mathbf{p}$ con $\mathbf{q}$ mediante la funzione $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ definita da

$$\gamma(t) = t\mathbf{q} + (1-t)\mathbf{p}$$

Gli estremi della curva sono $\gamma(0) = \mathbf{p}$ e $\gamma(1) = \mathbf{q}$. Il vettore

$$\gamma'(t) = \mathbf{q} - \mathbf{p}$$

rappresenta la velocità (in questo caso costante) con cui il punto $\gamma(t)$ si muove lungo la curva.

Se la funzione γ è di classe $\mathcal{C}^1$ e se $|\gamma'(t)| \neq 0$ per ogni $t \in [a,b]$ diremo che la curva γ è *regolare*. In tal caso diremo che la *direzione tangente* alla curva γ nel punto $\gamma(t)$ è il versore

curva regolare
direzione tangente

$$\frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}.$$

Questa definizione è giustificata dal fatto che la direzione *secante* tra i punti $\gamma(t)$ e $\gamma(t+h)$ (con $h > 0$) è data da

$$\frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{|\gamma(t+h) - \gamma(t)|} = \frac{\frac{\gamma(t+h)-\gamma(t)}{h}}{\left|\frac{\gamma(t+h)-\gamma(t)}{h}\right|}$$

e per $h \to 0^+$ tende in effetti alla direzione tangente (mentre per $h \to 0^-$ si otterrà la direzione opposta).

2 LUNGHEZZA E INTEGRALE CURVILINEO

Supponiamo che γ sia di classe $\mathcal{C}^1$. Se $\gamma'(t)$ rappresenta la velocità (istantanea, al tempo t) con cui il punto $\gamma(t)$ si muove lungo la sua traiettoria, la velocità *scalare* sarà data da $v(t) = |\gamma'(t)|$. Dunque definiamo la *lunghezza della curva* γ tramite l'integrale della velocità scalare: *lunghezza*

$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt.$$

Se poi $f\colon [\gamma] \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è una funzione definita sui punti del supporto di γ e tale che $f \circ \gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sia integrabile, si può definire *l'integrale curvilineo* di f su γ mediante la formula *integrale curvilineo*

$$\int_\gamma f\, ds = \int_a^b f(\gamma(t))|\gamma'(t)|\, dt.$$

Esempio 2.1 *(la cicloide).* Si consideri il moto di un punto γ che si trova su una circonferenza di raggio R che rotola senza strisciare. Usando un sistema di coordinate in cui y è la verticale e x è l'ascissa lungo la retta di rotolamento.

Se la velocità angolare della ruota è $\omega = 1$ le coordinate del punto $\gamma(t)$ si possono ottenere mediante la composizione di un moto rotatorio (diciamo in senso orario) e di una traslazione a velocità costante nella direzione dell'asse x. Si potranno quindi ottenere queste equazioni per un *giro* completo della ruota:

$$\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = (x(t), y(t))$$
$$\begin{cases} x(t) = Rt - R\sin t \\ y(t) = R - R\cos t. \end{cases}$$

Facendo le derivate si ottiene:

$$\begin{cases} x'(t) = R - R\omega\cos t \\ y'(t) = R\sin t \end{cases}$$

da cui

$$\begin{aligned} |\gamma'(t)| &= \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = R\sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t} \\ &= R\sqrt{2 - 2\cos t} = R\sqrt{2 - 2(1 - 2\sin^2(t/2))} \\ &= R\sqrt{4\sin^2(t/2)} = 2\omega R|\sin(t/2)|. \end{aligned}$$

Da cui la lunghezza della curva percorsa è data da

$$\ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} |\gamma'(t)|\, dt = 2\omega R \int_0^{2\pi} \sin(t/2)\, dt = -4[\cos(t/2)]_0^{2\pi} = 8.$$

3 RIPARAMETRIZZAZIONI

Se $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ è una curva e $p\colon [c,d] \to [a,b]$ è una funzione continua e bigettiva, componendo γ con p si ottiene un'altra *parametrizzazione* (cioé una *riparametrizzazione*) σ della curva γ: *riparametrizzazione*

$$\sigma(t) = \gamma(p(t)).$$

Osserviamo che se $p: [c,d] \to [a,b]$ è continua e iniettiva, necessariamente p è strettamente monotona (altrimenti tramite il teorema dei valori intermedi si otterrebbe un assurdo) e quindi ci sono due sole possibilità: o p è strettamente crescente oppure p è strettamente decrescente. Nel primo caso perché p sia anche surgettiva si deve avere $p(c) = a$ e $p(d) = b$. Nel secondo caso (quando p è decrescente) si avrà $p(c) = b$, $p(d) = a$. Inoltre in ogni caso la funzione inversa $p^{-1}: [a,b] \to [c,d]$ sarà anch'essa bigettiva e continua.

Date le curve $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ e $\sigma: [c,d] \to \mathbb{R}^n$ diremo che γ e σ sono *equivalenti* se esiste una funzione continua e bigettiva $p: [c,d] \to [a,b]$ tale che $\sigma(t) = \gamma(p(t))$. Se p è strettamente crescente diremo inoltre che γ e σ hanno la *stessa orientazione*, in caso contrario diremo che hanno *orientazione opposta*. *orientazione*

E' facile verificare che due curve equivalenti hanno lo stesso supporto $[\gamma] = [\sigma]$.

Lemma 3.1. *Se γ e σ sono equivalenti e regolari, allora la funzione p tale che $\gamma(t) = \sigma(p(t))$ è di classe $\mathcal{C}^1$, invertibile, con inversa di classe $\mathcal{C}^1$.*

Dimostrazione. Fissiamo un punto $t \in [c,d]$. Visto che $|\gamma'(p(t))| \neq 0$. Questo significa che posto $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$ c'è almeno una componente $\gamma_k(t)$ tale che $\gamma_k'(t) \neq 0$. Supponiamo per semplicità $\gamma_k'(t) > 0$. Essendo $\gamma_k \in \mathcal{C}^1$ si ha che γ_k' è continua e quindi per la permanenza del segno sarà $\gamma_k'(\tau) > 0$ per ogni τ in un opportuno intorno di t. Dunque γ_k è invertibile, con inversa derivabile, in un intorno di t ed essendo:

$$\sigma_k(t) = \gamma_k(p(t))$$

si può scrivere

$$p(t) = \gamma_k^{-1}(\sigma_k(t)).$$

da cui si ottiene che $p(t)$ è derivabile e la sua derivata è continua. Lo stesso vale per la funzione inversa $p^{-1}(t)$ scambiando γ con σ. □

Teorema 3.2 (invarianza dell'integrale curvilineo)**.** *Se σ e γ sono curve regolari equivalenti, e sia f una funzione continua definita sul loro supporto. Allora*

$$\int_\sigma f\, ds = \int_\gamma f\, ds.$$

Dimostrazione. Sia $p(t)$ la riparametrizzazione tale che $\sigma(t) = \gamma(p(t))$. Per il lemma precedente sappiamo che p è una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ con inversa di classe $\mathcal{C}^1$. Supponiamo che sia $p'(t) > 0$ (cioè le curve hanno la stessa orientazione). Allora si ha

$$\int_\gamma f\, ds = \int_a^b f(\gamma(\tau))|\gamma'(\tau)|\, d\tau = \int_c^d f(\gamma(p(t))|\gamma'(p(t))|\, p'(t)\, dt$$

dove abbiamo applicato il cambio di variabili $\tau = p(t)$, da cui $d\tau = p'(t)dt$ e $p(c) = a$ e $p(d) = b$ (gli estremi vengono mantenuti nello stesso ordine se l'orientazione è la stessa).

Osserviamo ora che $\gamma(p(t)) = \sigma(t)$ e derivando questa identità osserviamo anche che $\gamma'(p(t))p'(t) = \sigma'(t)$ da cui (ricordando che $|p'(t)| = p'(t)$) si ottiene

$$\int_\gamma f\, ds = \int_c^d f(\sigma(t))|\sigma'(t)|\, dt = \int_\sigma f\, ds.$$

Dunque il teorema è dimostrato nel caso in cui γ e σ abbiano orientazione concorde. Nel caso di orientazione opposta osserviamo che si avrà $|p'(t)| = -p'(t)$ ma gli estremi dell'integrale saranno scambiati: $p(c) = b$, $p(d) = a$... dunque alla fine il risultato non cambia. □

4 PARAMETRIZZAZIONE PER LUNGHEZZA D'ARCO

Se $\gamma(t)$ rappresenta la posizione di un punto al tempo t, la quantità

$$s(t) = \ell(\gamma_{|[a,t]}) = \int_0^t |\gamma'(\tau)|\, d\tau$$

si chiama *lunghezza d'arco* e rappresenta la distanza percorsa dal punto $\gamma(t)$ nell'intervallo di tempo $[a, t]$. In altri termini $s(t)$ rappresenta la lunghezza del tratto di curva compreso tra $\gamma(a)$ e $\gamma(t)$. *lunghezza d'arco*

Se γ è una curva regolare possiamo osservare che (per il teorema fondamentale del calcolo integrale)

$$s'(t) = |\gamma'(t)| > 0$$

dunque posto $L = \ell(\gamma) = s(b)$ osserviamo che $s\colon [a, b] \to [0, L]$ è bigettiva e continua e $\eta(s) = \gamma(s^{-1}(s))$ è una riparametrizzazione. Osserviamo qui l'abuso di notazione avendo utilizzato la lettera s sia per indicare la funzione $s(t)$ che per indicare la variabile $s = s(t)$.

Diremo che una curva regolare $\gamma\colon [0, L] \to \mathbb{R}^n$ è parametrizzata *per lunghezza d'arco* se si ha $|\gamma'(t)| = 1$ per ogni $t \in [0, L]$. In tal caso si avrà $s(t) = t$, infatti essendo unitaria la velocità, i parametri tempo e spazio coincidono. Inoltre $L = \ell(\gamma)$ risulta essere la lunghezza totale della curva.

Spesso la variabile s è riservata alle parametrizzazioni per lunghezza d'arco. Questo spiega il simbolo ds utilizzato nella notazione degli integrali curvilinei, infatti quando $\gamma(s)$ è parametrizzata per lunghezza d'arco si ha

$$\int_\gamma f\, ds = \int_0^L f(\gamma(s))|\gamma'(s)|\, ds = \int_0^L f(\gamma(s))\, ds$$

Se $\gamma(t)$ con $t \in [a, b]$ è una curva con una parametrizzazione qualunque, si può determinare la riparametrizzazione che ci porta ad una curva $\sigma(s)$ parametrizzata per lunghezza d'arco. Si tratta di calcolare

$$s(t) = \int_a^t |\gamma'(\tau)|\, d\tau$$

e quindi definire $\sigma(s) = \gamma(s^{-1}(s))$. La funzione $s(t)$, infatti, ci permette di convertire il parametro t (il tempo) nel parametro s (lo spazio percorso, o lunghezza d'arco). Per ottenere una parametrizzazione rispetto alla lunghezza d'arco è quindi necessario invertire tale funzione. Verifichiamo che $\sigma(s) = \gamma(s^{-1}(t))$ è parametrizzata per lunghezza d'arco. Ricordando che $s'(t) = |\gamma'(t)|$ si ha:

$$|\sigma'(s)| = |\gamma'(s^{-1}(s))(s^{-1})'(s)| = \frac{|\gamma'(s^{-1}(s))|}{|s'(s)|} = 1.$$

Osserviamo ora che avendo posto $s = s(t)$ si potrebbe utilizzare la notazione $t = t(s)$ per indicare la funzione inversa di $s(t)$. Questo è coerente con la notazione di Leibniz per le derivate:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\frac{dt}{ds}}$$

Allo stesso modo si userà di frequente lo stesso simbolo per indicare γ e σ:

$$\gamma(s) = \gamma(t(s))$$

da cui se $|d\gamma/ds| = 1$ si ha, formalmente:

$$ds = \left|\frac{d\gamma}{ds}\right| ds = \left|\frac{d\gamma}{dt}\right| \left|\frac{dt}{ds}\right| ds = |\gamma'(t)| dt.$$

Esercizio 4.1 *(baricentro di un arco di circonferenza).* Ci poniamo l'obiettivo di calcolare il baricentro di un arco di circonferenza di raggio R e ampiezza α. Sia $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ con $t \in [0, \alpha]$

$$\begin{cases} x(t) = R\cos t \\ y(t) = R\sin t \end{cases}$$

Le coordinate del baricentro $(\bar{x}, \bar{y})$ sono date da

$$\begin{cases} \bar{x} = \fint_\gamma x(s)\, ds = \frac{\int_\gamma x(s)\, ds}{\ell(\gamma)} \\ \bar{y} = \fint_\gamma y(s)\, ds = \frac{\int_\gamma y(s)\, ds}{\ell(\gamma)} \end{cases}$$

Osserviamo ora che

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = R$$

da cui si ricava $ds = Rdt$ e quindi $\ell(\gamma) = \int_0^\alpha R\, dt = \alpha R$.

Allora possiamo calcolare le coordinate $(\bar{x}, \bar{y})$ del baricentro:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \fint_\gamma x\, ds = \frac{1}{\alpha R} \int (R\cos t) R\, dt \\ &= \frac{R}{\alpha} [\sin t]_0^\alpha = R\frac{\sin\alpha}{\alpha}. \\ \bar{y} &= \fint_\gamma y\, ds = \frac{1}{\alpha R} \int (R\sin t) R\, dt \\ &= \frac{R}{\alpha} [-\cos t]_0^\alpha = R\frac{1-\cos\alpha}{\alpha}. \end{aligned}$$

5 REGISTRO MODIFICHE

2014-10-13 Prima stesura.

2014-10-17 Correzioni/piccole modifiche.