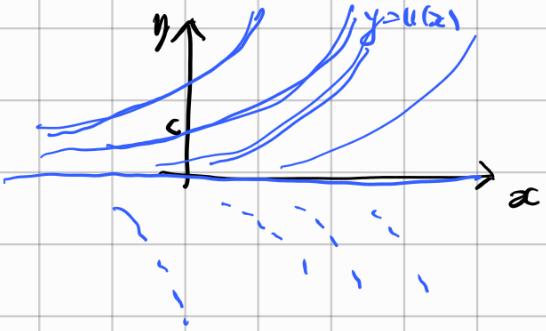
ANALISI MATEMATICA 2
LEZIONE 61 - 14.5.2026

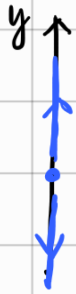
Modelli biologici di crescita

Malthus

x = tempo $\qquad u(x)$ = numerosità di una popolazione

$$u' = A \cdot u \quad \longrightarrow \quad u(x) = c\, e^{A \cdot x}$$



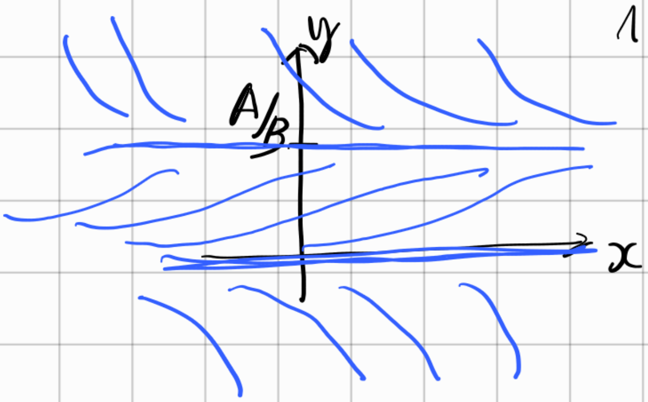


← punto di equilibrio (instabile)

Equazione logistica

$$u' = A \cdot u - B u^2 = (A - Bu)\, u$$

$$\left(u(x) = 1 - \frac{1}{1 \pm e^{x - x_0}} \qquad (A=1, B=1) \right)$$



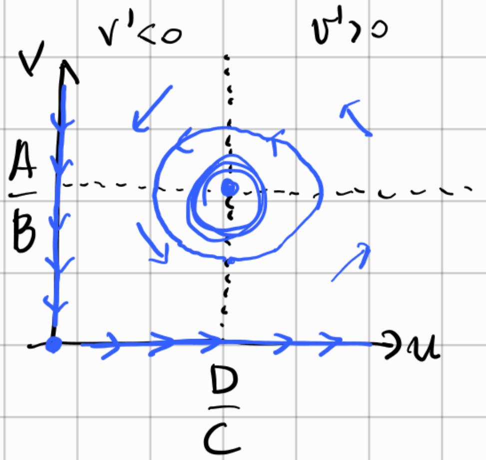
$u' = 0$

← punto di equilibrio stabile.

Modello di Volterra-Lotka (preda-predatore)

$u(x)$ = quantità di pesce preda
$v(x)$ = " " " predatore

$$\begin{cases} u' = Au - Buv = (A - Bv)u \\ v' = Cuv - Dv = (Cu - D)v \end{cases}$$



① sol. stazionarie

② $v = 0$, $u = 0$ $\qquad u' = Au$, $v' = -Dv$

Hamiltoniana (integrale primo)

$$\begin{cases} u' = (A - Bv)u \\ v' = (Cu - D)v \end{cases}$$

$H(u,v)$ tale che $H(u(x), v(x))$ è costante se $u(x), v(x)$ è una soluzione

$$\frac{v'}{u'} = \frac{(Cu - D)v}{(A - Bv)u}$$

$$\frac{A - Bv}{v} v' = \frac{Cu - D}{u} u'$$

$$\left(\frac{A}{v} - B\right) v' = \left(C - \frac{D}{u}\right) u'$$

$$\int \left(\frac{A}{v} - B\right) v'(x)\, dx = \int \left(C - \frac{D}{u}\right) u'(x)\, dx$$

$v = v(x)$ $\qquad$ $u = u(x)$

$dv = v'(x)\,dx$ $\qquad$ $du = u'(x)\,dx$

$$\left[\int\left(\frac{A}{v}-B\right)dv\right]_{v=v(x)} = \left[\int\left(C-\frac{D}{u}\right)du\right]_{u=u(x)}$$

$$A\ln v - Bv = Cu - D\ln u + \text{cost}\,\Big|_{\substack{u=u(x)\\ v=v(x)}} \quad \forall x$$

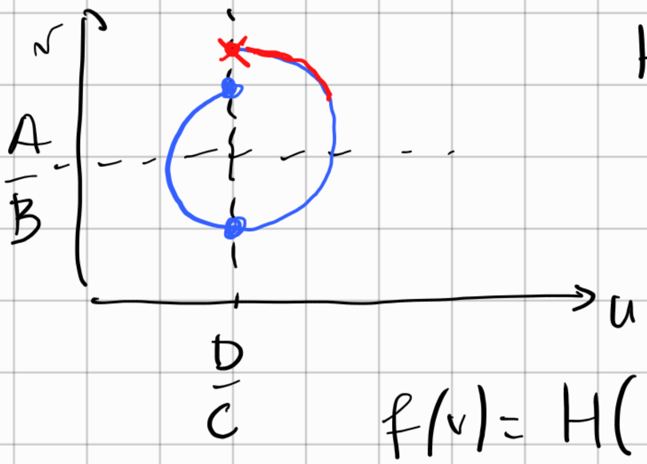
$$H(u,v) = Bv + Cu - A\ln v - D\ln u$$

H è costante nelle orbite: $\quad H(u(x), v(x)) = \text{cost.}$

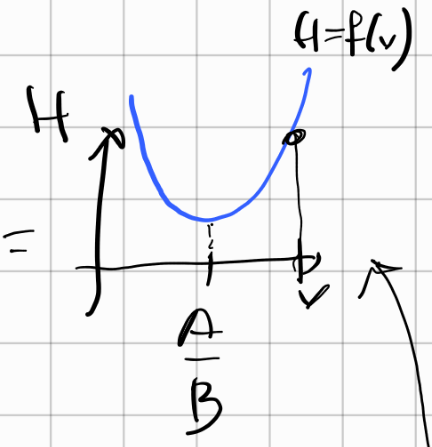
Notiamo che $H : (0,+\infty)\times(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ è coerciva (tende a $+\infty$ sulla frontiera del dominio)

$\Rightarrow$ le orbite sono limitate

$\Rightarrow$ le orbite si chiudono!

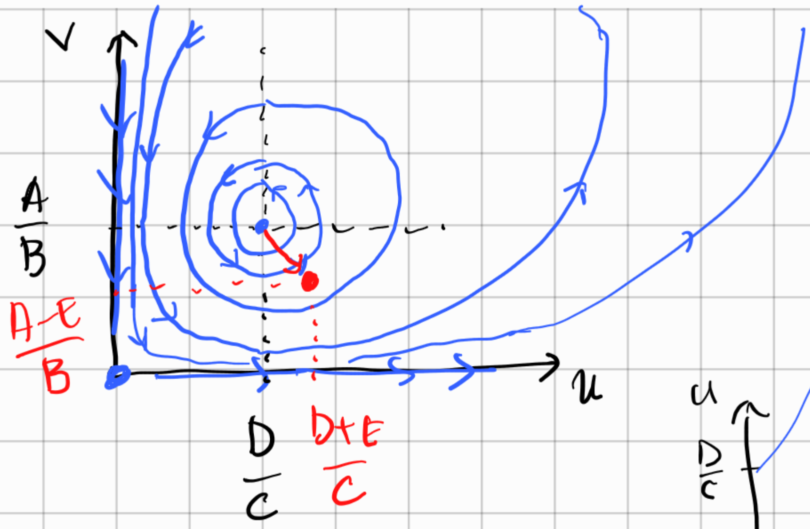


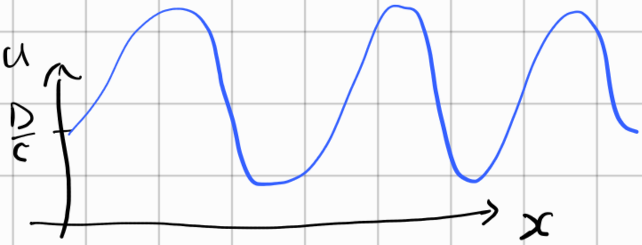
$H\left(\frac{D}{C}, v\right) =$

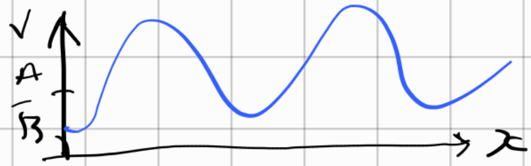


$$f(v) = H\left(\frac{D}{C}, v\right) = Bv - A\ln v + \text{cost}$$

$$f'(v) = \frac{\partial}{\partial y} H\left(\frac{D}{C}, v\right) = B - \frac{A}{v} > 0$$







Effetto della pesca:

$$\begin{cases} u' = (A - Bv)u \\ v' = (Cu - D)v \end{cases}$$

SITUAZIONE NATURALE (SENZA PESCA)

$$\begin{cases} u' = (A - Bv - E)u \\ v' = (Cu - D - E)v \end{cases}$$

$A \to A - E$

$D \to D + E$

La pesca favorisce la preda!

Sarebbe interessante studiare i sistemi lineari.

Caso più semplice: lineare omogeneo, coefficienti costanti, 2 variabili, I ordine

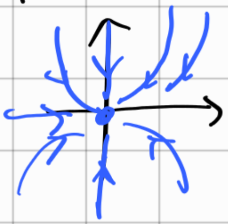
$$\begin{cases} u' = Au + Bv \\ v' = Cu + Dv \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

<u>Oss 1</u> Posso cambiare variabile per ricondurmi alla forma canonica di Jordan.

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

- Il sistema si può risolvere riconducendolo ad una equazione del II ordine.

$$\begin{cases} u' = \lambda u \\ v' = \mu v \end{cases}$$

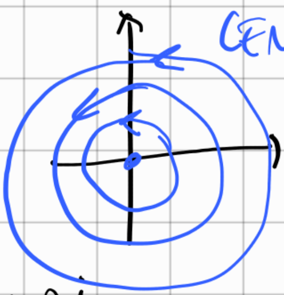


NODO

$\lambda, \mu < 0$

SELLA

$\lambda < 0 < \mu$



CENTRO

$\lambda = \beta i$

$\mu = -\beta i$

FUOCO

$\lambda = \alpha + i\beta \qquad \alpha \neq 0$

$\mu = \alpha - i\beta$

C'È UN TEOREMA DI LINEARIZZAZIONE.

$u \in \mathbb{R}^n$

$\underline{u}' = f(\underline{u}) \qquad f(\underline{u}_0) = 0 \qquad f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$u(x) = u_0$ è soluzione stazionaria

$$f(\underline{u}) = f(u_0) + Df(u_0)(u - u_0) + o(|u - u_0|)$$

$v = u - u_0 \qquad v' = \underbrace{Df(u_0)}_{\text{MATRICE A COEFFICIENTI COSTANTI}} \cdot v$

ES

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} Au - Buv \\ Cuv - Dv \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} u_0 = D/C \\ v_0 = A/B \end{cases} \qquad Df = \begin{pmatrix} A - Bv, & -Bu \\ Cv, & Cu - D \end{pmatrix}$$

$$Df\left(\frac{D}{C}, \frac{A}{B}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{BD}{C} \\ \frac{AC}{B} & 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_{1 2} = \pm i\beta \qquad \begin{matrix} tr = 0 \\ det = \beta^2 \end{matrix}$ Sistema linearizzato : $\begin{cases} u' = -\frac{BD}{C} v \\ v' = \frac{AC}{B} u \end{cases}$

$$v'' = \frac{AC}{B} u' = \frac{AC}{B}\left(-\frac{BD}{C}\right) v$$

$$v'' + AD\, v = 0$$

$$v = k \cos\left(AD(x - x_0)\right)$$