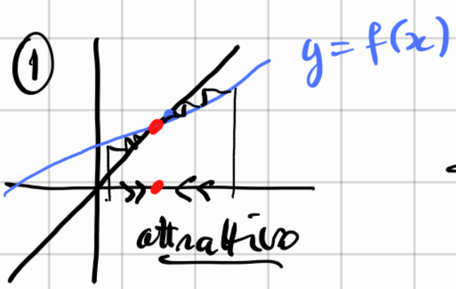
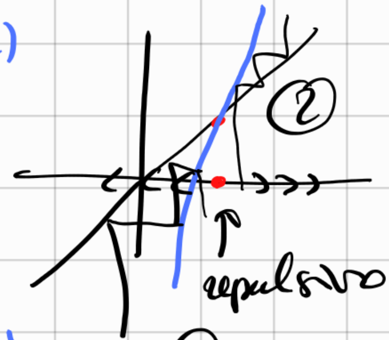
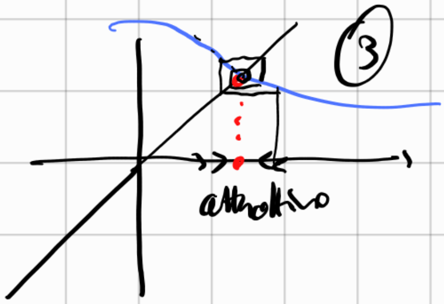
ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 21

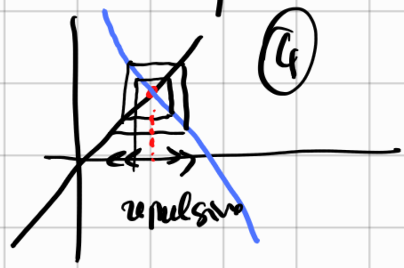
SUCCESSIONI RICORSIVE (SISTEMI DINAMICI)

$$a_{n+1} = f(a_n)$$









Esempio
$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}$$

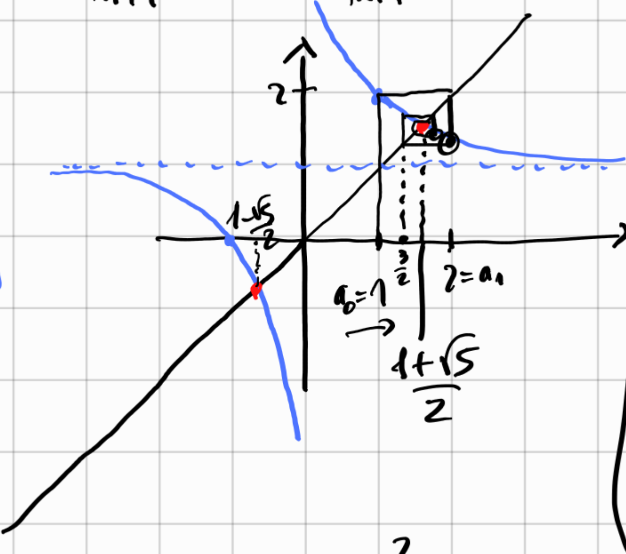
$F : (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots)$

Sugli appunti:
$$F_k = \frac{\varphi^k}{\sqrt{5}} + \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{5}\,\varphi^k}$$
$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \leftarrow$$

$$a_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$$

$$a_{n+1} = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = \frac{F_{n+1}+F_n}{F_{n+1}} = 1 + \frac{F_n}{F_{n+1}} = 1 + \frac{1}{a_n}$$

$$\boxed{\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{a_n} \end{cases}}$$



RAPPORTO AUREO
$$\frac{1}{x} = \frac{x-1}{1}$$
$$x^2 - x = 1$$

$$x^2 = x + 1$$

punti fissi:
$$1 + \frac{1}{x} = x \qquad x + 1 = x^2$$

$$x^2 - x - 1 = 0 \qquad x_{12} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Teorema (già visto) $a_{n+1} = f(a_n)$, $f: A \to A$, f crescente
allora a_n è monotona

Teorema (nuovo) $a_{n+1} = f(a_n)$, $f: A \to A$, f decrescente
allora a_{2n} e a_{2n+1} sono monotone
una è crescente l'altra decrescente.

dim

a_{2n} $\qquad a_{2n+2} = f(a_{2n+1}) = f(f(a_{2n})) = (f \circ f)(a_{2n})$
$\qquad\qquad a_{2n+3} = f(a_{2n+2}) = f(f(a_{2n+1})) = (f \circ f)(a_{2n+1})$

f decrescente $\Rightarrow$ $f \circ f$ è crescente
$\Rightarrow$ a_{2n} e a_{2n+1} sono monotone (teo già visto)

se a_{2n} è crescente $\quad a_{2n+1} = f(a_{2n})$ è decrescente

$$a_{2n+3} = f(a_{2n+2}) \underset{\Uparrow}{\leq} f(a_{2n}) = a_{2n+1}$$
$$a_{2n+2} \geq a_{2n}$$

viceversa se a_{2n} è decrescente $\Rightarrow$ a_{2n+1} è crescente $\square$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x}$$

$I = (0, +\infty)$ è invariante: $x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow \underbrace{1 + \frac{1}{x}}_{>0} > 1$
Su I f è decrescente
a_{2n} e a_{2n+1} sono monotone.

$a_1 = 1$, $a_2 = 1 + \frac{1}{1} = 2$, $a_3 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

NON SERVE
$$\boxed{a_4 = 1 + \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{5}{3},\ a_5 = 1 + \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{8}{5}}$$

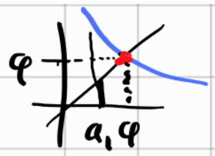
a_{2n+1} è crescente perché $a_1 < a_3$
$\Rightarrow$ a_{2n} è decrescente

$a_{2n+1} \longrightarrow \ell$
$a_{2n} \longrightarrow \ell'$

$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ fidocenerete

se $x < \varphi \Rightarrow f(x) > f(\varphi) = \varphi$

se $x > \varphi \Rightarrow f(x) < f(\varphi) = \varphi$



$a_1 < \varphi$, $a_2 > \varphi$, $a_3 < \varphi$ ....

$a_1 = 1$

$a_{2n+1} < \varphi$ $\forall n.$

$a_{2n} > \varphi$

a_{2n} e a_{2n+1} sono limitate quindi sono convegenti

$\Rightarrow \ell, \ell' \in \mathbb{R}$

ℓ e ℓ' sono punti fissi di $f \circ f$.

Oss Se $f(x) = x \Rightarrow f(f(x)) = f(x) = x$

se x punto fisso di $f \Rightarrow x$ è punto fisso di $f \circ f$.

$\cancel{\Leftarrow}$ (es: $f(x) = -x$)

Risolvo $f(f(x)) = x$

$$1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = x \qquad 1 + \frac{x}{x+1} = x$$

$$x+1+x = x(x+1)$$

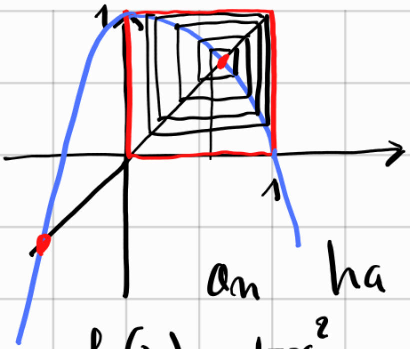
$$2x+1 = x^2+x$$

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

$$\ell = \varphi \qquad \ell' = \varphi.$$

$$\begin{cases} a_{2n} \to \varphi \\ a_{2n+1} \to \varphi \end{cases} \Rightarrow a_n \to \varphi. \qquad \square$$

Esercizio



$$\begin{cases} a_{n+1} = 1 - a_n^2 \\ a_0 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

a_n ha limite?

$f(x)=x$ $\quad 1-x^2=x$ ha 2 sol

$f(x) = 1-x^2$

$f(f(x)) = 1-(1-x^2)^2 = x$

$\uparrow$

0 e 1 sono soluzioni

MAPPA LOGISTICA

$\boxed{a_{n+1} = c \cdot a_n}$ $\leftarrow$

$a_0 = \alpha$
$a_1 = c\cdot\alpha$
$a_2 = c^2\cdot\alpha$
$a_3 = c^3\cdot\alpha$
$\vdots$
$a_n = c^n\cdot\alpha$

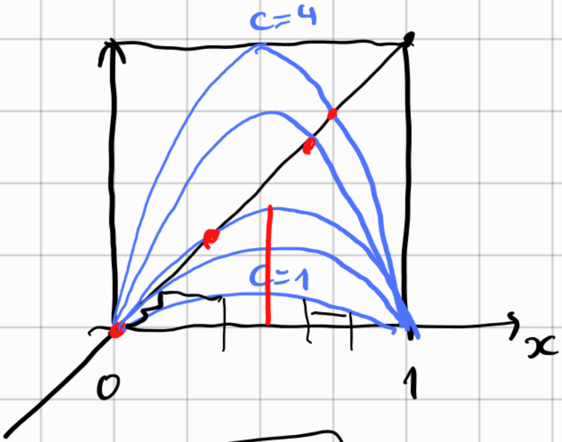
$$a_{n+1} = c\cdot a_n(1-a_n)$$

c parametro
$c>0$

crescita esponenziale

$I = [0,1]$

$f(x) = c\cdot x(1-x)$



$0\leq c \leq 4$ $\quad I$ è invariante

$f\left(\frac12\right) = c\cdot\frac12\cdot\frac12 = \frac{c}{4}$

$x(1-x)\leq x$ $\quad$ per $x\in[0,1]$

$f(x)=x$ $\quad cx(1-x)=x$

$x=0$ è sempre punto fisso

$c(1-x)=1$ $\quad c-cx=1$ $\quad cx=c-1$

$\boxed{x = 1-\frac{1}{c}}$

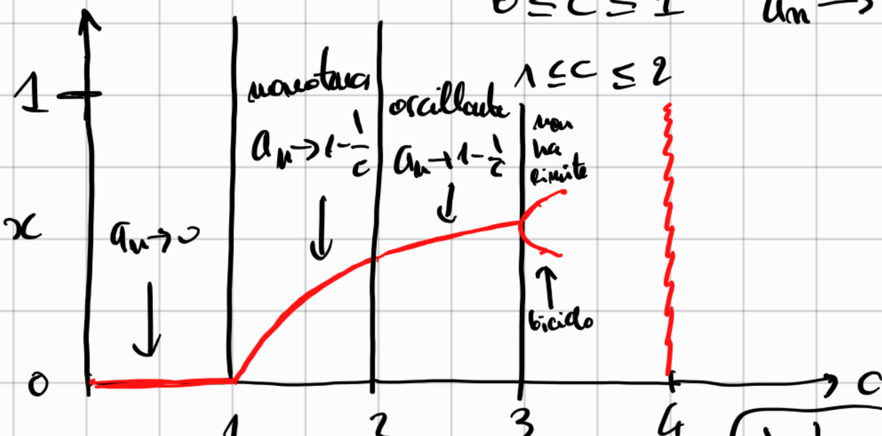
$0\leq c\leq 1$ $\quad a_n\to 0$

$1\leq c\leq 2$

$1-\frac1c \leq \frac12$

$2c-2\leq c$

$c\leq 2$



$\boxed{c=4}$

è l'Esercizio 7.13 degli appunti