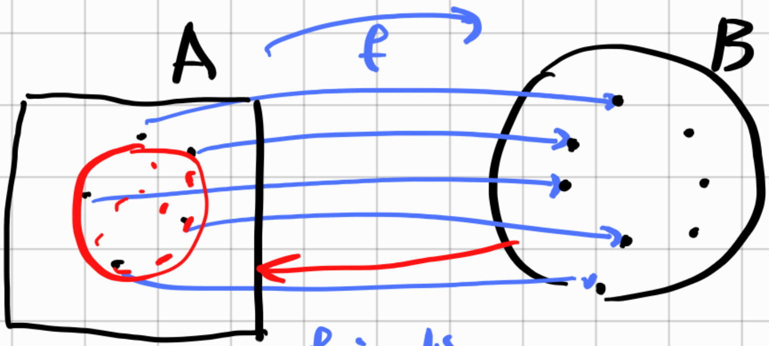
ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 4 - 29.9.2023

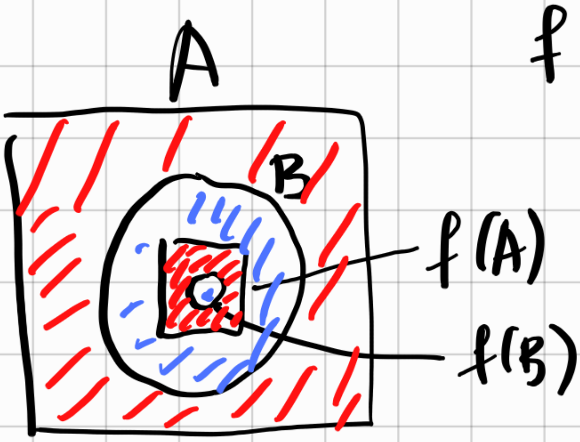
Teorema di Cantor-Bernstein

Se $\#A \leq \#B$ e $\#B \leq A$ allora $\#A = \#B$

Ovvero: se esiste $f: A \to B$ iniettiva ed
esiste $g: B \to A$ iniettiva
allora esiste $\varphi: A \to B$ bigettiva



f iniettiva.



$f: A \to B \subseteq A$

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in \\ x & \end{cases}$$

Teorema di Cantor

Teorema X insieme. $\#X < \#\mathcal{P}(X)$

ovvero: (1) $\exists f$ iniettiva $f: X \to \mathcal{P}(X)$ (banale)
$x \mapsto \{x\}$

e: (2) $\nexists f$ bigettiva $f: X \to \mathcal{P}(X)$.

dim ① ok. ② non esiste $f : X \to \mathcal{P}(X)$ suriettiva.

dimostrazione per assurdo:

$$P \Rightarrow Q$$

- $P \wedge \neg Q \Rightarrow$ assurdo!
- $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

Per assurdo $\exists\, g : X \to \mathcal{P}(X)$ suriettiva

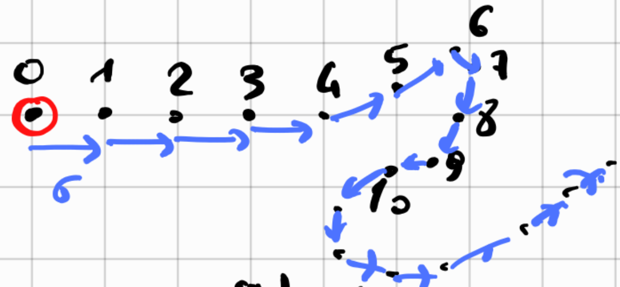
$$C = \{x \in X : x \notin g(x)\}$$

$C \in \mathcal{P}(X)$ $\quad$ g suriettiva: $C = g(c)$ $\quad$ $c \in X$

$$c \in C \iff c \notin g(c) = C \iff c \notin C. \qquad \square$$

Prossimi passi: $\overbrace{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}}^{\#\text{ uguale}}, \overbrace{\mathbb{R}, \mathbb{C}}^{\#\text{ maggiore}}$

$\mathbb{N}$: numeri naturali



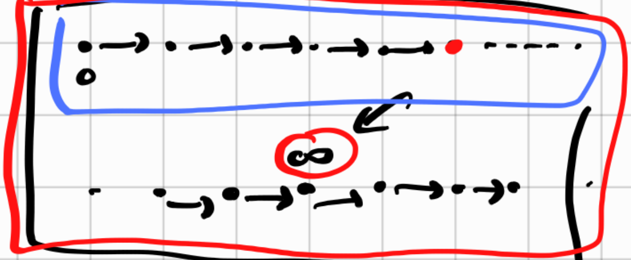
Vogliamo avere $\mathbb{N}$ t.c. $\quad 0 \in \mathbb{N}$

$\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

1. σ iniettiva.

2. $\sigma(\mathbb{N}) = \underline{\mathbb{N} \setminus \{0\}}$
3. Se $A \subseteq \mathbb{N}$
   (i) $0 \in A$
   (ii) $n \in A \Rightarrow \sigma(n) \in A$
   Allora $A = \mathbb{N}$.

A è induttivo



3 implica la validità del:

PRINCIPIO DI INDUZIONE:

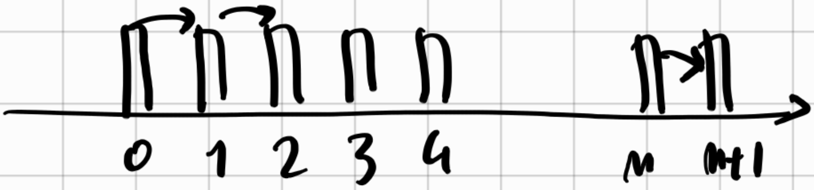
Sia P un predicato nella variabile n. $\quad 2^n \geq n^2$

Se

(1) $P(0)$ è vero

(2) $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

allora $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$.



dim $\quad A = \{ n \in \mathbb{N} : P(n) \}$

Operazioni e relazioni su $\mathbb{N}$

si definisce per induzione

$\sigma(n) = n+1. \qquad n+m = ?$

$n+2 = \sigma(\sigma(n)). \qquad n+m = \overbrace{\sigma(\sigma(\sigma, \dots, \sigma(n) \dots)}^{m\text{-volte}}$

$= \sigma^m(n)$

$= (\underbrace{\sigma \circ \sigma \circ \dots \circ \sigma}_{m \text{ volte}})(n)$

$$\boxed{\begin{cases} n+0 = n \\ n+\sigma(m) = \sigma(n+m) \end{cases}}$$

$(n+(m+1)) = (n+m)+1$

definizione per induzione

$1 = \sigma(0)$

$$\boxed{\begin{cases} n \cdot 0 = 0 \\ n \cdot \sigma(m) = n \cdot m + n \end{cases}} \longrightarrow n \cdot m$$

$$\begin{cases} n^0 = 1 \\ n^{\sigma(m)} = n^m \cdot n. \end{cases}$$

$[\, 0^0 = 1 \,]$

$n \geq m \iff \exists k \in \mathbb{N} : n = m + k$

Fattoriale:

$n! \overset{?}{=} \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}$ formalmente: $\begin{cases} \underline{0! = 1} \\ (n+1)! = n! \cdot (n+1) \end{cases}$

$(n+1)! = \underbrace{1 \cdot 2 \cdots n}_{n!} \cdot (n+1)$

Esempio dimostrare che $\underbrace{2^{n+4} \geq (n+4)^2}_{P(n)}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

n	0	1	2	3	4	5	6	7
2^n	1	2	4	8	16	32	64	128
2^{n+4}	16	32	64	128	256	512	1024	2048
n^2	0	1	4	9	16	25	36	49
$(n+4)^2$	16	25	36	49	64	81	100	121

$\geq$

$2^n \geq n^2$ se $n \geq 4$

dimostrazione per induzione:

(1) $2^{0+4} \geq (0+4)^2$ ← base

$2^4 \geq 4^2$

$\|$ $\quad$ $\|$

$16 = 16$ ok

(2) $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ ← passo induttivo

$\uparrow$

ipotesi induttiva

$P \Rightarrow Q$

$P \Rightarrow P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow P_3 \Rightarrow Q$

$$P(n+1): \quad 2^{n+5} \overset{?}{\geq} (n+5)^2 \qquad\qquad P(n): \quad 2^{n+4} \overset{!}{\geq} (n+4)^2$$

$$\begin{array}{c} 2^{n+5} = 2 \cdot 2^{n+4} \overset{P(n)}{\geq} 2 \cdot (n+4)^2 = \underline{(n+4)^2} + \underline{(n+4)^2} \\ ?\rotatebox{90}{$\leq$} \\ (n+5)^2 = (\underbrace{n+4}+1)^2 = \underline{(n+4)^2} + \underline{2(n+4)+1} \end{array}$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

basta: $(n+4)^2 \overset{?}{\geq} 2(n+4)+1 = \underline{2n} + \underline{9}$

$$\begin{array}{c} \| \\ \underline{n^2} + \underline{8n} + \underline{16} \end{array} \qquad \underline{n^2+8n+16} \overset{!}{\geq} 2n+9$$

$\square$

Per casa

- $(n+1)! \geq 2^n$
- $n^n \geq n!$

dimostrarlo per induzione

PARADOSSO DELL'INFINITO (DI GALILEO)

$$\#\{1, 4, 9, 16, \dots\} = \#\{n^2 : n \in \mathbb{N}\} = \#\mathbb{N}.$$

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$$

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}+1$ è bigettiva

$$\underline{\#\mathbb{N} = \#(\mathbb{N}+1)}. \quad (\text{Hotel Hilbert})$$

X è infinito se $\exists f: X \to X$ iniettiva ma non suriettiva.