ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 2 - 20.9.2023

Esercizio (di riscaldamento)

$$((P \wedge Q) \Rightarrow R) \Leftrightarrow (P \Rightarrow (Q \Rightarrow R))$$

$$\Updownarrow$$

$$Q \Rightarrow (P \Rightarrow R)$$

Alcune proprietà degli operatori logici:

$\neg\neg P \iff P$ doppia negazione

$\neg(P \wedge Q) \iff \neg P \vee \neg Q$ De Morgan

$\neg(P \vee Q) \iff \neg P \wedge \neg Q$

$(P \Rightarrow Q) \iff (\neg P \vee Q)$

P	Q	R	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \Rightarrow R$	$Q \Rightarrow R$	$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$	$\Leftrightarrow$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V	V	V
F	V	F	F	V	F	V	V
F	F	V	~~V~~ F	V	V	V	V
F	F	F	~~V~~ F	V	V	V	V

CORREZIONE

CALCOLO dei PREDICATI

ES: P: $x+2=5$ Q: $x+y=y+x$

ha un valore di verità che dipende da una o più variabili

Quantificatori logici

$\forall$ $\exists$

universale

esistenziale

$$\overbrace{\forall x : \overbrace{x+2=5}^{\text{predicato}}}$$

Proposizione (falsa)

$\exists x : x+2=5$

Proposizione (vera)

$\forall y : \exists x : x=y$ vero

$\exists y : \forall x : x=y$ falsa

CORREZIONE

$$\forall \overset{y}{\cancel{x}} \exists \overset{x}{\cancel{y}} : P(x,y) \Leftarrow \exists x \forall y : P(x,y)$$

$$\exists x \exists y \Leftrightarrow \exists y \exists x$$

$$\forall x \forall y \Leftrightarrow \forall y \forall x$$

$$(\neg \forall x : P(x)) \Leftrightarrow (\exists x : \neg P(x))$$

$$(\neg \exists x : P(x)) \Leftrightarrow (\forall x : \neg P(x))$$

UGUAGLIANZA

$x=y$

Proprietà:
- $\forall x : x=x$
- $(x=y) \Rightarrow (P(x) \Leftrightarrow P(y))$
- $x=y \Leftrightarrow y=x$

UNICITA'

$\exists !\, x : P(x)$

$\Updownarrow$

per definizione: $\exists x : [P(x) \wedge (\exists y : P(y) \Rightarrow x=y)]$

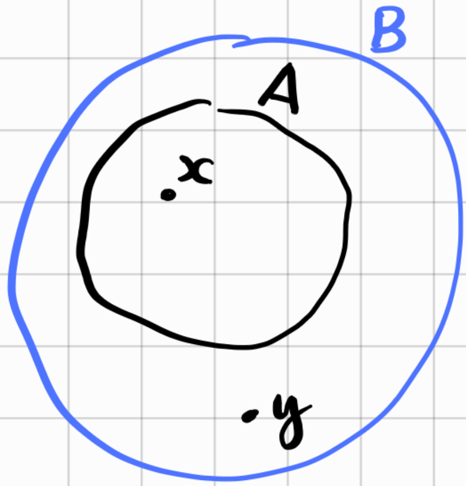
ES $\exists !\, x : x+2=5$

$y+2=5 \Rightarrow y=3$

$\neg \exists !\, x : P(x)$

$\exists ! \Rightarrow \exists$

TEORIA degli INSIEMI



Un predicato $x \in A$

Definizioni: $A \subseteq B$

$$\overset{\text{def.}}{\Updownarrow}$$

$$\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B$$

$$B \supseteq A \Leftrightarrow A \subseteq B$$

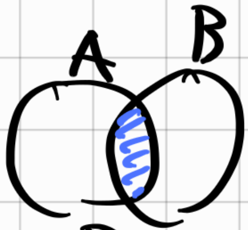
$$\forall x : x \in B \Leftarrow x \in A$$

$$A = B \Leftrightarrow \forall x : x \in A \Leftrightarrow x \in B$$

↑ proprietà dell'uguaglianza.

---

generatori

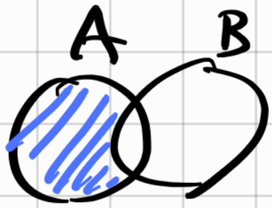


$$X = A \cap B$$

Assioma $\forall A \forall B \ \exists X : x \in X \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$$

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$$



$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \wedge \neg x \in B$$

NOTAZIONE $\neg(x \in B)$

$$\overset{\text{def.}}{\Updownarrow}$$

$$x \notin B$$

Assiomi $\exists \emptyset$

$$\exists A : \forall x : \neg(x \in A)$$

Assioma singoletto $\{x\}$

$$\forall x\, \exists A : \forall y : y \in A \iff \underline{y = x}$$

Esercizio: A è unico

Assioma insieme delle parti $\mathcal{P}(A)$

$$B \in \mathcal{P}(A) \iff B \subseteq A$$

Es $A = \{1, 2, 3, 4\} = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\}$

$\{1\} \subseteq A$, $\{2\} \subseteq A$, $\{3\} \subseteq A$

$\emptyset \subseteq A$ $\qquad x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$

$\{1, 2\} \subseteq A$ ....

$\{1, 2, 3\} \subseteq A$ ..

$\{1, 2, 3, 4\} = A \subseteq A$.

$$\mathcal{P}(A) = \{ \underset{1}{\emptyset}, \underbrace{\{1\}, \dots, \{4\}}_{4}, \underbrace{\{1,2\}, \{1,3\} \dots}_{6}, \underbrace{\{1,2,3\} \dots}_{4}, \underset{1}{A} \}$$

$1 + 4 + 6 + 4$

SEMPLIFICAZIONE: tutti gli oggetti sono insiemi.

ES $0 = \emptyset = \{\}$ $\qquad \emptyset \in \{\emptyset\} = \{\{\}\}$

$1 = \{0\}$ $\qquad \emptyset \notin \emptyset$

$2 = \{0,1\}$

$\vdots$ $\qquad 3 = \{0,1,2\} = \{0,1\} \cup \{2\}$
$= 2 \cup \{2\}$

$n+1 = n \cup \{n\}$ $\qquad 2 = \{0,1\}$

Assioma esiste un insieme infinito (cosa vuol dire "infinito"?)
(LO VEDREMO)

Posso definire il complementare?

$U = \emptyset^c$ $\qquad x \in A^c \iff x \notin A$

$\forall x : x \in U$

NO

Assioma di specificazione ingenua:

Se $P(x)$ è un predicato esiste

$A = \{x : P(x)\}$

$y \in A \iff P(y)$.

NO

Paradosso di Russell $\qquad R = \{x : x \notin x\}$

$R \in R \iff R \notin R$ $\qquad$ ASSURDO

Assioma di specificazione

Se P è un predicato e A è un insieme

esiste $B = \{ x \in A : P(x) \}$

$$x \in B \iff x \in A \wedge P(x)$$

Se esistesse U universo: $\forall x : x \in U$

$\rightarrow R = \{ x \in U : x \notin x \}$

$$R \in R \iff R \notin R$$ ASSURDO
