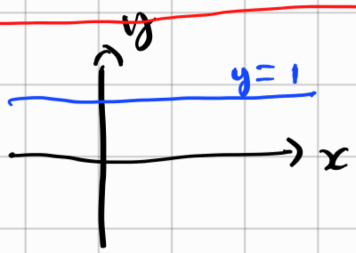
ANALISI MATEMATICA
10.3.2023

DERIVATE PARZIALI

Esempio $f(x,y) = \underbrace{x^2+y^2-xy}$ $\qquad f = x^2+y^2-xy$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g'(x)}$$ dove fissato y
$g(x) = f(x,y)$



$$\begin{cases} g(x) = f(x,1) = x^2+1^2-x\cdot 1 \\ \qquad = x^2-x+1 \\ g'(x) = 2x-1 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,1) = 2x-1 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[x^2+y^2-xy\right] = 2x+0-y = 2x-y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[x^2+y^2-xy\right] = 0+2y-x = 2y-x$$

Più in generale.

$f(x_1,\dots,x_n)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1,\dots,x_n) = g'(x_k) \quad \text{dove } g(t) = f(x_1,\dots,x_{k-1},\underset{\substack{\uparrow \\ x_k}}{t},x_{k+1},\dots,x_n)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1,\dots,x_k+h,\dots,x_n) - f(x_1,\dots,x_n)}{h}$$

Notazioni alternative: $f = f(x,y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = D_x f$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = D_y f$$

Esercizio calcolare le derivate parziali delle seguenti funzioni di più variabili.

$$f(x,y) = x \cdot \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 1 \cdot \sqrt{x^2+y^2} + x \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2x+0}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} + \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x \cdot \dfrac{1}{2} \dfrac{0+2y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{x \cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

Esercizio

$$f(x,y,z) = z \cdot e^{x^2+y}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = z \cdot e^{x^2+y} \cdot 2x = 2 \cdot x \cdot z \cdot e^{x^2+y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = z \cdot e^{x^2+y} \cdot 1 = z\, e^{x^2+y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = e^{x^2+y} \end{cases}$$

GRADIENTE

$$\nabla f(x_1, \dots x_n) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \dots x_n) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots x_n) \end{pmatrix}$$

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$\nabla f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

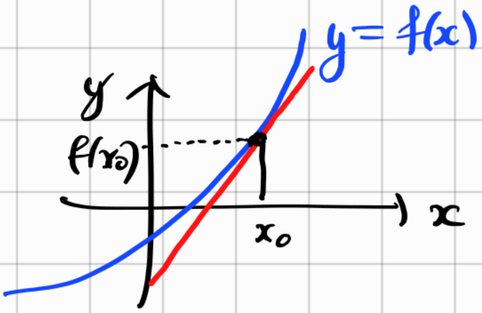
<u>Esempio</u> $f = x \cdot \sqrt{x^2+y^2}$ visto prima

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{x \cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}$$

<u>Esempio</u> $f = z \cdot e^{x^2+y}$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot x \cdot z \cdot e^{x^2+y} \\ z\, e^{x^2+y} \\ e^{x^2+y} \end{pmatrix}$$

<u>Interpretazione geometrica</u>



In una variabile $y = f(x)$

$f'(x_0)$ è la pendenza della retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$.

L'equazione della retta tangente è:

$$\boxed{y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right] = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \boxed{\left(f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)\right)}}{x - x_0} = 0$$

$$f(x) - \left[f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0) \right] = o(x - x_0) = o(|x - x_0|)$$

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)\cdot(x - x_0)} + o(|x - x_0|)} \quad (*)$$

Formula di Taylor per f centrata in $x = x_0$ di ordine $n = 1$.

f ha derivata $f'(x_0)$ se e solo se vale $(*)$

Per funzioni di n variabili si usa $(*)$ per definire la DIFFERENZIABILITÀ:

Def $f = f(\underline{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ si dice essere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ <u>differenziabile</u> in $\underline{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ se $\exists L \in \mathbb{R}^n$

t.c.: $$\boxed{f(\underline{x}) = \boxed{f(x^*) + L \cdot (\underline{x} - \underline{x}^*)} + o(|x - x^*|)}$$

vettore

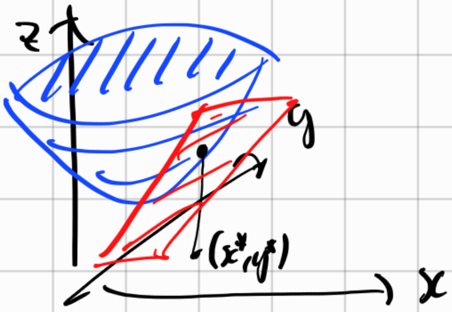
vettore

prodotto scalare.

$$|x - x^*| = \sqrt{(x_1 - x_1^*)^2 + \dots + (x_n - x_n^*)^2}$$

piano tangente al grafico di f

[$\underline{x} \mapsto L \cdot \underline{x}$ si chiama differenziale di f nel punto x_0 e si indica df_{x_0}]



$z = f(x,y)$

Il piano tangente è:

$$z = f(x^*,y^*) + L \cdot \begin{pmatrix} x-x^* \\ y-y^* \end{pmatrix}$$

Def f si dice derivabile in $\underline{x}^*$ se in $\underline{x}^*$ esistono tutte e n le derivate parziali: $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}^*), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x}^*)$.

Teo Se f è differenziabile in $\underline{x}^*$ allora f è derivabile in $\underline{x}^*$ e risulta che $L = \nabla f(\underline{x}^*)$.

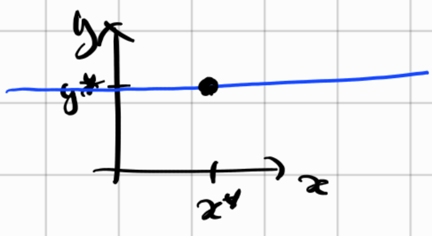
dim (in 2 variabili).

$f = f(x,y)$. Se f è differenziabile in (x^*,y^*) significa che esiste $L = (L_1, L_2)$ tale che

$$f(x,y) = f(x^*,y^*) + L \cdot (x-x^*, y-y^*) + o\left(\sqrt{(x-x^*)^2+(y-y^*)^2}\right)$$

Se metto $y = y^*$:

$L = (L_1, L_2)$



$$f(x,y^*) = f(x^*,y^*) + L \cdot (x-x^*, 0) + o(|x-x^*|)$$
$$= f(x^*,y^*) + L_1 \cdot (x-x^*) + o(|x-x^*|)$$

Se chiamo $g(x) = f(x,y^*)$

$$g(x) = g(x^*) + L_1 \cdot (x-x^*) + o(|x-x^*|)$$

questo (visto prima) è equivalente a dire: $g'(x^*) = L_1$

ma $\quad g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y^*)$

quindi: $\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) = g'(x^*) = L_1$

Analogamente se fisso $x = x^*$:

$$f(x^*, y) = f(x^*, y^*) + L_2(y - y^*) + o(|y - y^*|)$$

$$\vdots$$

$$L_2 = \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*).$$

$$L = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} = \nabla f(x^*, y^*)$$

$\square$.

PIANO TANGENTE

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Se f è differenziabile in $\underline{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ allora il grafico di f ha piano tangente nel punto $(\underline{x}^*, f(\underline{x}^*))$ e l'eq. del piano tangente è:

$$y = f(\underline{x}^*) + \nabla f(\underline{x}^*) \cdot (\underline{x} - \underline{x}^*)$$

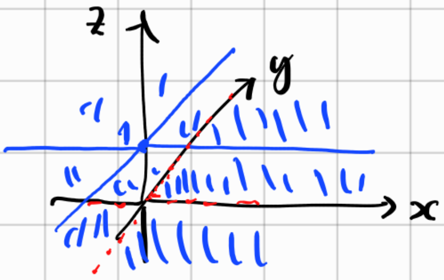
prodotto scalare

Teorema precedente

f differenziabile $\Rightarrow$ f derivabile

ma in generale non vale il viceversa:

Esempio $\quad f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \cdot y = 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$



[· f non è neanche continua in $(0,0)$]

f è derivabile in $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = g'(x) = 0 \qquad \text{con } g(x) = f(x,0) = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = h'(y) = 0 \qquad \text{con } h(y) = f(0,y) = 1$$

$$\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se f fosse differenziabile in $(0,0)$ dovrebbe valere:

$$f(x,y) = \underset{1}{\underset{\parallel}{f(0,0)}} + L \cdot \cancel{(x,y)} + o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

ma $L = \nabla f(0,0) = (0,0)$

ma se $x \neq 0$ e $y \neq 0$ ottengo:

$$0 = f(x,y) = 1 + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\cancel{o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}} \qquad 0 = 1 \quad \text{assurdo.}$$

per $(x,y) \to (0,0)$

Teorema (non lo dimostriamo!)

Se $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, Ω aperto, è derivabile in ogni punto di Ω e se tutte le derivate parziali sono continue, allora f è differenziabile in ogni punto di Ω.

Def Diremo che f è di classe C^1 se f è derivabile in ogni punto del suo dominio e se tutte le derivate parziali sono continue.

(il Teorema diventa: $f \in C^1(\Omega) \Rightarrow f$ è differenziabile su tutto Ω

Esempio $f(x,y,z) = \underbrace{z\, e^{x^2+y}}$ è di classe C^1
perché composizione di funzioni di classe C^1.

(Teo composizione di funzioni differenziabili è differenziabile)

Teo Se f è differenziabile in x^* allora f è continua in x^*.

dim

f differenziabile in x^*

$$f(x) = f(x^*) + \overbrace{\nabla f(x^*)\cdot(x-x^*) + o(|x-x^*|)}^{o(1)}$$

f è continua in x^*

$$f(x) = f(x^*) + o(1).$$

$$\left[\ f(x^*) = \lim_{x\to x^*} f(x) \iff \lim_{x\to x^*} f(x) - f(x^*) = 0\ \right]$$

se $|x-x^*| \to 0$

Cauchy-Schwarz

$$\left|\nabla f(x^*)\cdot(x-x^*)\right| \le \underbrace{|\nabla f(x^*)|}_{\text{fissato}} \cdot \underbrace{|x-x^*|}_{0} \longrightarrow 0$$

$\square$

Esempio (patologico)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

f è derivabile su tutto $\mathbb{R}^2$ (esistono $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$)
ma f non è continua in $(0,0)$
e quindi non è differenziabile.

dim: se $(x,y)\neq(0,0)$ f è differenziabile in (x,y).

perché $f=\frac{xy}{x^2+y^2}$ è rapporto di funzioni derivabili infinite volte quindi è derivabile con derivata continua.

(MA) f è derivabile anche in $(x,y)=(0,0)$: infatti

$$f(x,0)=\begin{cases}0 & \text{se } x\neq 0\\ 0 & \text{se } x=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,0)=0$$

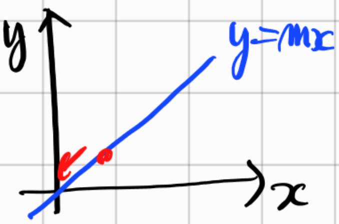
$$f(0,y)=\begin{cases}0 & \text{se } y\neq 0\\ 0 & \text{se } y=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,y)=0$$

$$\nabla f(0,0)=(0,0).$$

$(MA)^2$ f non è continua in $(0,0)$!

Se fosse continua dovrei avere $f(x,mx)\to f(0,0)=0$ per $x\to 0$



$$f(x,mx)=\begin{cases}\frac{x\cdot mx}{x^2+m^2x^2} & \text{se } x\neq 0\\ 0 & \text{se } x=0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx)=\lim_{\substack{x\to 0\\ (x\neq 0)}} \frac{m\cancel{x^2}}{(1+m^2)\cancel{x^2}}=\frac{m}{1+m^2}$$

se $m = 1$ $\qquad \frac{m}{1+m^2} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)$.

<u>Esercizio</u> Trovare l'equazione del piano tangente al grafico della funzione: $f(x,y) = x^2+y^2-xy$ nel punto $(x^*,y^*) = (1,0)$.

L'eq. è:

$$\boxed{z = f(x^*,y^*) + \nabla f(x^*,y^*) \cdot \begin{pmatrix} x-x^* \\ y-y^* \end{pmatrix}}$$

$$f(1,0) = 1^2+0^2-1\cdot 0 = 1$$

$$\nabla f(1,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 - 0 \\ 2\cdot 0 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x-y \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y-x \end{cases}$$

L'eq. è: $\quad z = 1 + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}$

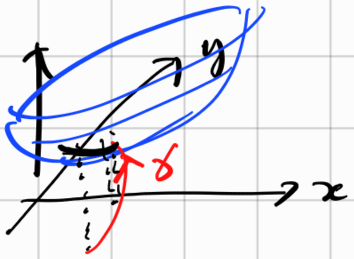
$$z = 1 + 2(x-1) + (-1)\cdot y$$

$$z = 2x - y - 1$$

COMPOSIZIONE di FUNZIONI

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

curva



Esempio

- $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$
- $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \qquad \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

FUNZIONE COMPOSTA:

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$g(t) = f(\gamma(t))$$

$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ $\quad \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$

Nell'esempio:

$$g(t) = \cos^2 t + \sin^2 t - \cos t \cdot \sin t$$
$$= 1 - \cos t \sin t$$

COME SI CALCOLA LA DERIVATA?

Teo Se γ è una curva derivabile e se f è una funzione differenziabile allora posto $g = f \circ \gamma$ $\quad g(t) = f(\gamma(t))$

$$\boxed{g'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)}$$

$\gamma(t) = (x_1(t) \dots x_n(t))$

$\gamma'(t) = (x_1'(t), \dots, x_n'(t))$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t)) \cdot x_1'(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\gamma(t)) \cdot x_n'(t)$$

Esempio (quello di prima) $\quad f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$, $\quad \gamma(t) = \begin{matrix} x(t) \\ y(t) \end{matrix}$ $\quad \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$

$$g'(t) = \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = \frac{d}{dt} f(x(t), y(t))$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot y'(t)$$

$$= (2\cos t - \sin t) \cdot (-\sin t) + (2\sin t - \cos t) \cdot \cos t$$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - x$

$$= -2\cancel{\sin t}\cos t + \sin^2 t + 2\cancel{\sin t}\cos t - \cos^2 t$$

$$= \sin^2 t - \cos^2 t$$

$\boxed{\text{VERIFICA}}$

$$g(t) = 1 - \cos t \sin t$$

$$g'(t) = \sin^2 t - \cos^2 t$$