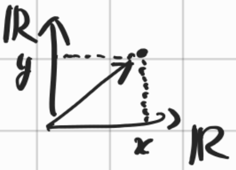
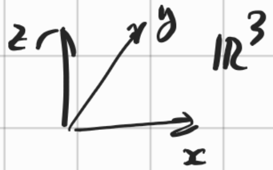
ANALISI MATEMATICA 679AA
3.3.2023

emanuele.paolini@unipi.it

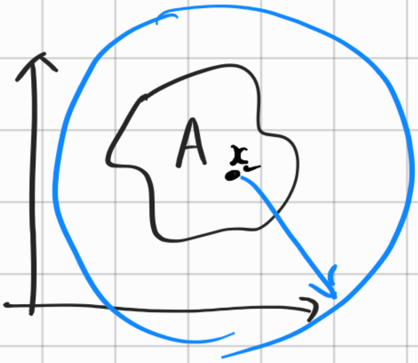
$\mathbb{R}^n$





$(x,y)\in\mathbb{R}^2$ $\quad x\in\mathbb{R}$ $y\in\mathbb{R}$ $\qquad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

$(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ $\qquad (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$



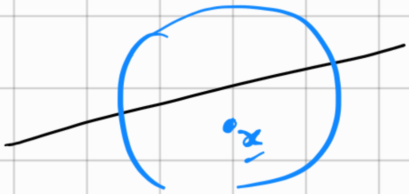
INSIEMI LIMITATI

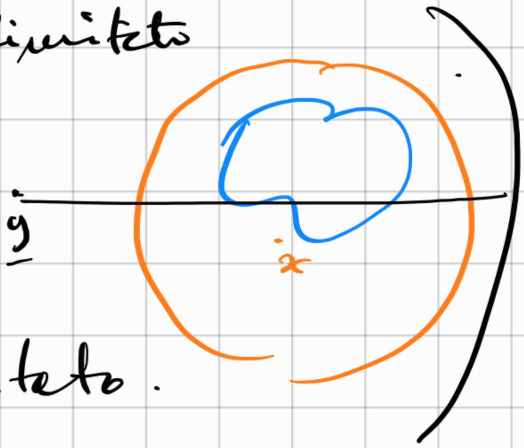
$A\subseteq\mathbb{R}^n$ $\qquad (\underline{x} = \mathbf{x} = \vec{x})$

A si dice limitato se $A\subseteq B_R(\underline{x})$

Palla: $\{\underline{y}\in\mathbb{R}^n : |\underline{x}-\underline{y}|<R\}$

Es una retta non è un insieme limitato

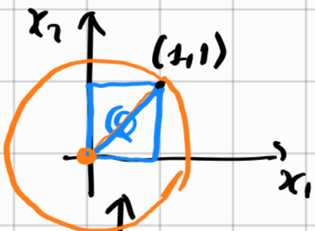


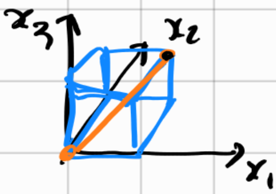


Es $\{\underline{x}\} = \{$un solo punto$\}$ è limitato.

Le palle sono limitate

Es Un cubo $Q=\{\underline{x}\in\mathbb{R}^n : \underline{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n) : 0\le x_k\le 1 \text{ per } k=1,\dots,n\}$





Esercizio Trovare centro $\underline{x}$ e raggio R t.c. $Q\subseteq B_R(\underline{x})$

in $\mathbb{R}^2$ $\quad \underline{y}=(1,1) \quad (y_1, y_2)$ $\qquad d(\underline{y},\underline{0}) = |\underline{y}-\underline{0}| = |\underline{y}| = \sqrt{y_1^2+y_2^2} = \sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

in $\mathbb{R}^3$ $\quad \underline{y}=(1,1,1) \quad d(\underline{y},\underline{0})=\dots=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$

⋮

in $\mathbb{R}^n$ $\quad \underline{y}=(\underbrace{1,1,\dots,1}_{n}) \quad d(\underline{y},0)=|\underline{y}|=\dots=\sqrt{n}.$

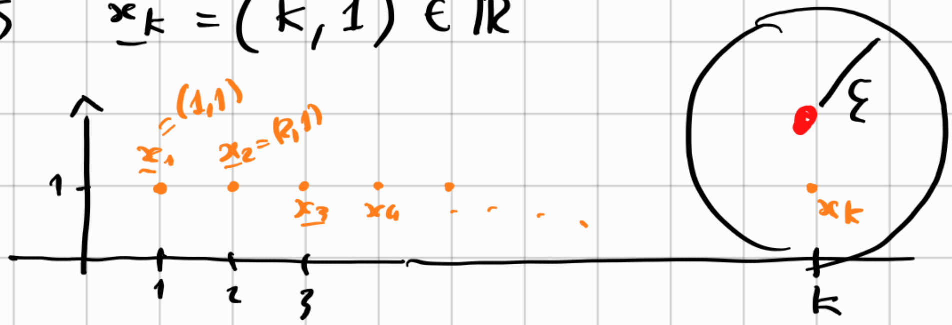
$B_R(0)\supseteq Q \quad$ se $\quad R>\sqrt{n}.$

Q è limitato.

SUCCESSIONI

$\underline{x}_k$ è un punto di $\mathbb{R}^n$ con $k\in\mathbb{N}$

Es $\quad \underline{x}_k=(k,1)\in\mathbb{R}^2$



limite di una successione

diremo che la successione $\underline{x}_k$ converge a $\underline{x}$

se $\quad \underbrace{\lim_{k\to+\infty} d(\underline{x}_k,\underline{x})=0} \qquad d(\underline{x}_k,\underline{x})\xrightarrow[k\to+\infty]{}0$

↑ la distanza tende a zero

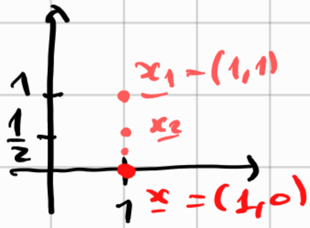
$\forall\varepsilon>0\ \exists N: \underline{\forall k\geq N}:\ d(\underline{x}_k,\underline{x})<\varepsilon$

$\underline{x_k\in B_\varepsilon(x)}$

Nota: se l'insieme $\{x_k\}$ non è limitato x_k non può convergere.

Es $\underline{x}_k = (k, 1) \in \mathbb{R}^2$ non converge.

Es $\underline{x}_k = \left(1, \frac{1}{k}\right)$



$\lim \underline{x}_k = (1,0) = \underline{x}$

Scriveremo $\underline{x}_k \to \underline{x}$.

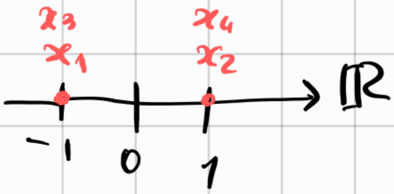
Oss $\underline{x}_k = (a_k, b_k) \to (a,b) = \underline{x}$

è come dire che $\begin{cases} a_k \to a \\ b_k \to b \end{cases}$

$$d(\underline{x}_k, \underline{x}) = \sqrt{\underbrace{(a_k - a)^2}_{\downarrow\, 0} + \underbrace{(b_k - b)^2}_{\downarrow\, 0}} \longrightarrow 0 \qquad \square$$

Teorema (Bolzano-Weierstrass) Se x_k è limitata allora x_k ha una estratta convergente

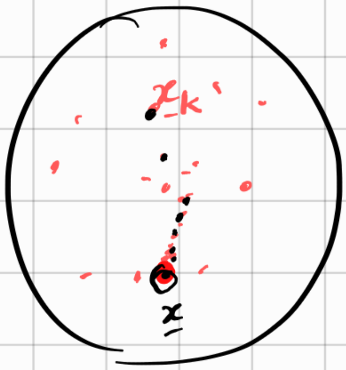
Es:



$$x_k = (-1)^k = \begin{cases} 1 & \text{se } k \text{ pari} \\ -1 & \text{se } k \text{ dispari} \end{cases}$$

x_k non converge ma tolti tutti i termini di indice dispari si ha $x_{2k} = 1 \to 1$.

x_{2k} è una estratta convergente



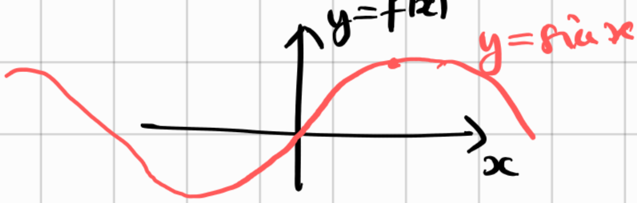
Idea della dim:

FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

Es funzioni di una variabile

$f(x) = \sin x$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \sin x$$



Es funzione di due variabili:

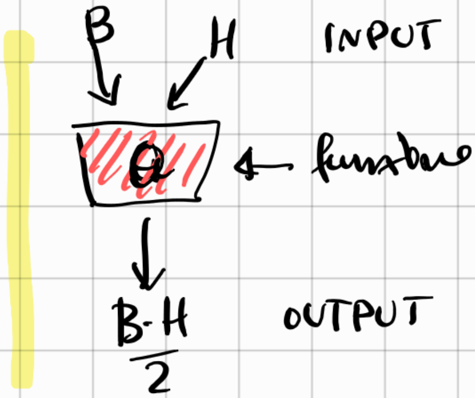
Area del triangolo: $\frac{B \cdot H}{2}$

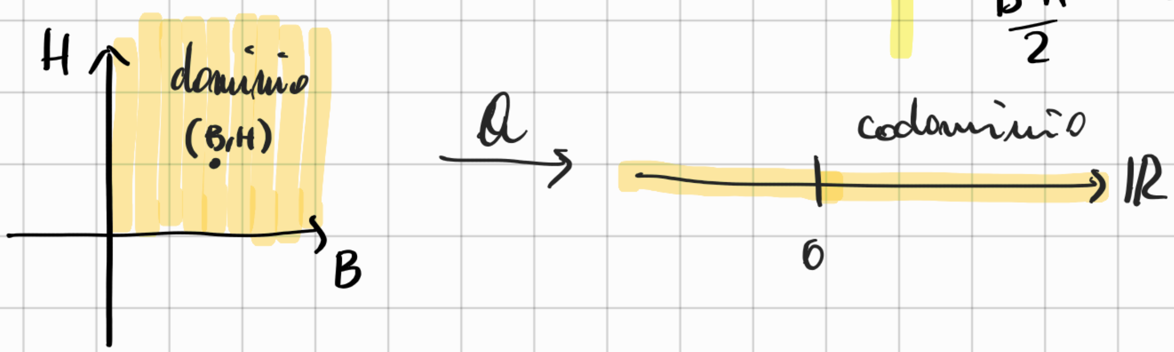
$$\mathcal{A}(B, H) = \frac{B \cdot H}{2}$$

$B, H \in (0, +\infty)$

$\mathbb{R}_+ = \{\text{numeri positivi}\}$

$$\mathcal{A} : \underbrace{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+}_{\subseteq \mathbb{R}^2} \longrightarrow \mathbb{R}$$





$x = B \qquad y = H \qquad f = \mathcal{A}$

$$f(x, y) = \frac{x \cdot y}{2} \qquad f(x_1, x_2) = \frac{x_1 \cdot x_2}{2}$$

$$f : \underset{\text{dominio}}{A} \longrightarrow \underset{\text{codominio}}{B}$$

[Se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ diremo che f è una funzione di n variabili.

Se $B = \mathbb{R}$ diremo che f è scalare

se $B = \mathbb{R}^m$ diremo che f è vettoriale.]

IMMAGINE di f

l'immagine di f è il sottoinsieme del codominio formato da tutti i punti che si possono ottenere in "uscita" da f. Si denota con $\mathrm{Im}\, f$.

Es

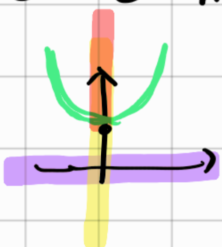
$$\mathcal{A}(B,H) = \frac{B \cdot H}{2}$$

se $B>0$, $H>0$
$\mathcal{A}(B,H) > 0$.

$\mathcal{A} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

l'immagine di $\mathcal{A}$ è $\mathbb{R}_+$.

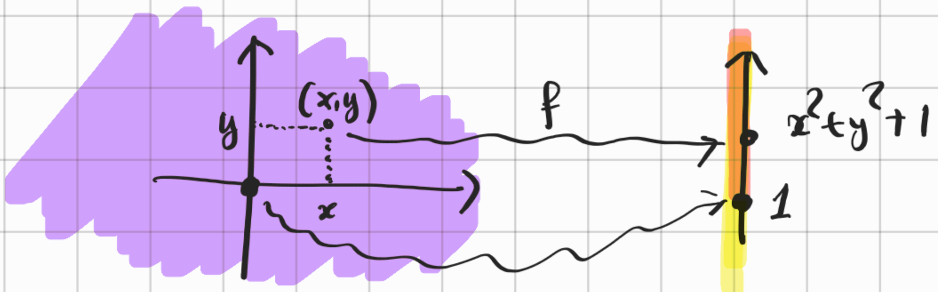
Es $f(x) = x^2+1$



$f : \underset{A}{\mathbb{R}} \to \underset{B}{\mathbb{R}}$

$\mathrm{Im}\, f = [1, +\infty)$

Es $f(x,y) = x^2+y^2+1$ $\qquad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$



$1 \in \mathrm{Im}\, f$?

$\exists ?\ x,y :$
$f(x,y) = 1$
$x^2+y^2+1 \overset{?}{=} 1$

$x^2+y^2 = 0$

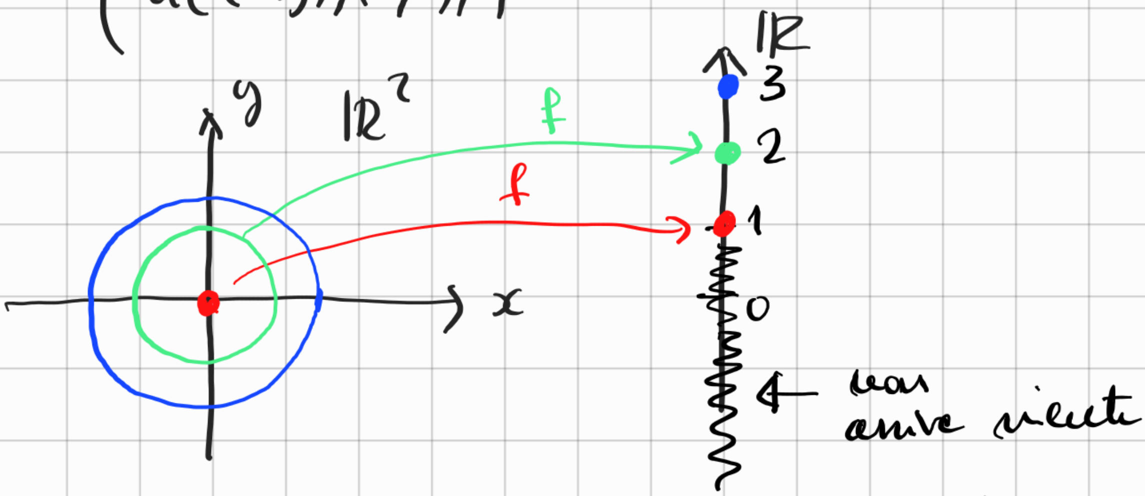
$x=0$ e $y=0$

$2 \in \operatorname{Im} f$? esistono (x,y) t.c. $f(x,y)=2$

$$x^2+y^2+1=2$$

$$x^2+y^2=1$$

$$\left(d((x,y),(0,0))\right)^2=1$$



$f(x,y)=3 \qquad x^2+y^2+1=3 \qquad x^2+y^2=2$

distanza dall'origine $= \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2}$

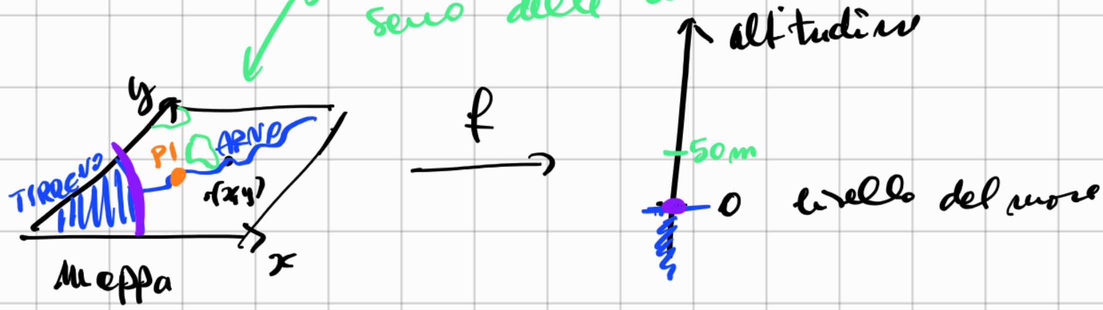
In generale

$$f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

l'insieme $L = \{ \underline{x} \in A : f(\underline{x}) = y \}$ si chiama <u>insieme di livello</u> y della funzione f.

<u>Interpretazione</u>

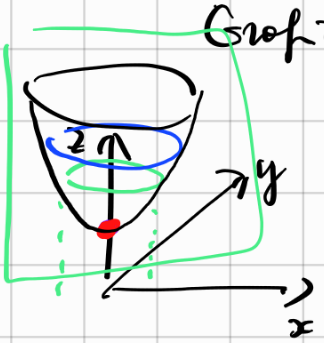
gli insiemi di livello sono delle curve | curve di livello



GRAFICO

$f : A \to B$

Grafico di f $= \{(\underline{x}, \underline{y}) : \underline{y} = f(\underline{x}). \} \subseteq A \times B$



ES $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$ $\quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

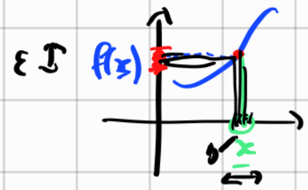
Grafico di f $= \{ (\underbrace{x, y}_{\text{dominio}}, \underbrace{z}_{\text{codominio}}) : z = f(x,y) \}$

$(0,0,1)$ sta nel grafico perciò $f(0,0) = 1$.

LIMITI e CONTINUITA'

f è continua in un punto $\underline{x} = (x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$

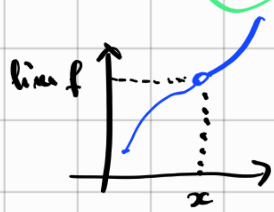
se



(1) $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 :$ se $d(\underline{y}, \underline{x}) < \delta$ allora $d(f(\underline{y}), f(\underline{x})) < \varepsilon$.

$|\underline{y} - \underline{x}| < \delta \qquad |f(\underline{y}) - f(\underline{x})| < \varepsilon$

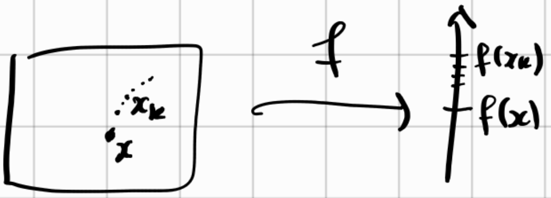
(2) $\lim_{\underline{y} \to \underline{x}} f(\underline{y}) = f(\underline{x})$



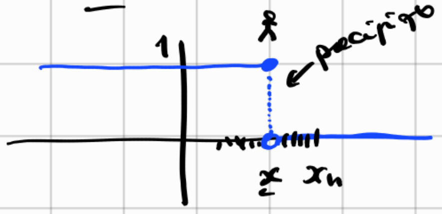
↳ dove: $\lim_{\underline{y} \to \underline{x}} f(\underline{y}) = \ell$ se $(\underline{y} \neq \underline{x})$

$\left[\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |\underline{y} - \underline{x}| < \delta \text{ allora } |f(\underline{y}) - \ell| < \varepsilon. \right]$

(3) Se $\forall \ \underline{x}_k \to \underline{x}$ allora $f(\underline{x}_k) \to f(\underline{x})$

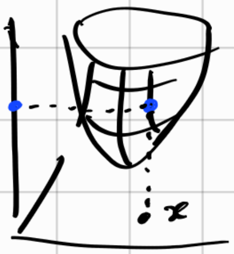


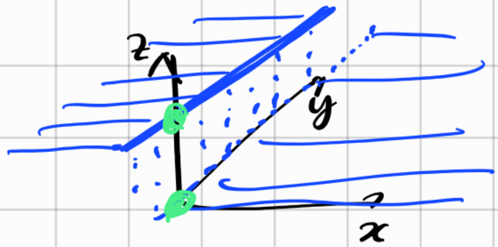
Es di funzione non continua:



$x_n \to x$,
$f(x_n) \to 0$
ma $f(x) = 1$.

Es $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$ è continua.





$$H(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 0 \\ 0 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

(*)

Fatto:
- le funzioni elementari sono continue: x^α, e^x, $\ln x$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\arcsin x \dots$
- somma, differenza, prodotto, rapporto, di funzioni continue è una funzione continua.
- composizione di funzioni continue è continua
- $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_3$ è continua.

Quindi ad esempio $f(x,y) = \sqrt{\ln\left(1 + \frac{x^2+y^3}{7}\right) + e^{\frac{x}{y}}}$

è una funzione continua!

Esercizio

f è continua

$f(x,y) = x^2+y^2+1$

- $\lim_{(x,y)\to(1,2)} x^2+y^2+1 = f(1,2) = 1^2+2^2+1 = 6$.
- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} H(x,y) = ?$ non è $H(0,0)$

NON ESISTE!

- $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^2+y^2}$$

$f(x,y) = \dfrac{x^4}{x^2+y^2}$ è continua dove è definita ma non è definita in $(0,0)$

se (x,y) è "vicino" a $(0,0)$ ad esempio se $|x|<1$

$$0 \le x^4 = x^2 \cdot x^2 \le x^2 \cdot (x^2+y^2)$$

$$0 \le \frac{x^4}{x^2+y^2} \le \frac{x^2 \cancel{(x^2+y^2)}}{\cancel{x^2+y^2}} \le x^2 \xrightarrow{\text{se } (x,y)\to(0,0)} 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^2+y^2} = 0$$