

# Analisi Matematica A e B

## Soluzioni prova scritta n. 1

Laurea in Fisica, a.a. 2022/23  
Università di Pisa

5 giugno 2023

1. Dire per quali  $\alpha > 0$  la seguente serie è convergente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}} - e^{\cos \frac{1}{n}}} \cdot e^{\cos \frac{1}{n}}}{\log \cos \frac{1}{n^\alpha}}.$$

*Soluzione.* Posto  $x = \frac{1}{n}$  possiamo utilizzare gli sviluppi di Taylor per  $x \rightarrow 0$ . Sono noti i seguenti sviluppi:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

da cui si ottiene

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$$

$$\log \cos x^\alpha = \log \left( 1 - \frac{x^{2\alpha}}{2} + o(x^{2\alpha}) \right) = -\frac{x^{2\alpha}}{2} + o(x^{2\alpha}).$$

Dunque

$$\begin{aligned} e^{\sqrt{1-x^2}} &= e^{1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o(x^4)} = e \cdot e^{-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o(x^4)} \\ &= e \cdot \left[ 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4) + \frac{\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2}{2} + o(x^4) \right] \\ &= e \cdot \left[ 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^4}{8} + o(x^4) \right] \end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned} e^{\cos x} &= e^{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)} = e \cdot e^{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)} \\ &= e \cdot \left[ 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right] + \frac{\left( -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \right)^2}{2} + o(x^4) \\ &= e \cdot \left[ 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{8} + o(x^4) \right]. \end{aligned}$$

In conclusione se  $a_n$  è il termine generico della serie data, si ha, per  $n \rightarrow +\infty$

$$a_n = e \cdot \frac{-\frac{1}{8n^4} - \frac{1}{24n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)}{-\frac{1}{2n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)} \sim e \cdot \frac{-\frac{1}{6n^4}}{-\frac{1}{2n^{2\alpha}}} = \frac{e}{3} \cdot \frac{1}{n^{4-2\alpha}}.$$

Questo significa che i termini della serie sono definitivamente positivi e, per il criterio di confronto asintotico, la serie data ha lo stesso carattere della serie armonica generalizzata  $\sum \frac{1}{n^p}$  con  $p = 4 - 2\alpha$ . Notoriamente tale serie converge se e solo se  $p > 1$  ovvero  $\alpha < 3/2$ .  $\square$

2. Dimostrare che per ogni  $\alpha > 0$  e ogni  $n \in \mathbb{N}$  si ha

$$\int_0^{+\infty} x^{2n+1} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{n!}{2\alpha^{n+1}}.$$

*Proof.* Lo possiamo fare per induzione. Chiamiamo  $I_n$  il valore dell'integrale. Per  $n = 0$  si ha

$$I_0 = \int_0^{+\infty} x e^{-\alpha x^2} dx = \left[ -\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha x^2} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2\alpha}.$$

Supponiamo ora che per un certo  $n$  si abbia  $I_n = \frac{n!}{2\alpha^{n+1}}$ . Allora integrando per parti si ha

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^{+\infty} x^{2n+3} e^{-\alpha x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{-2\alpha} \cdot (-2\alpha x) e^{-\alpha x^2} dx \\ &= \left[ \frac{1}{-2\alpha} x^{2n+2} e^{-\alpha x^2} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{2n+2}{-2\alpha} x^{2n+1} e^{-\alpha x^2} dx \\ &= 0 + \frac{2n+2}{2\alpha} I_n = \frac{2n+2}{2\alpha} \frac{n!}{2\alpha^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{2\alpha^{n+2}} \end{aligned}$$

come volevamo dimostrare.  $\square$

3. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(x) = (u^2(x) - 4) \cdot x^3, \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

Tracciare un grafico qualitativo della soluzione.

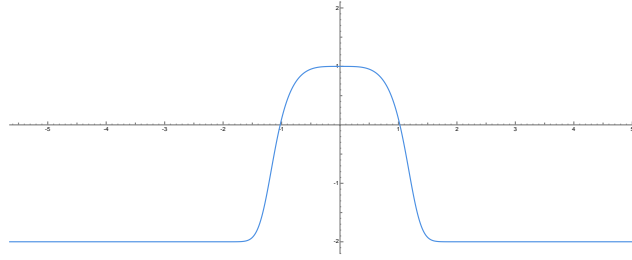


Figure 1: Grafico della soluzione del problema di Cauchy.

*Proof.* Possiamo tracciare il grafico qualitativo prima ancora di risolvere l'equazione. Osserviamo che le funzioni  $u(x) = 2$  e  $u(x) = -2$  sono soluzioni (stazionarie) dell'equazione differenziale. L'equazione è della forma  $u'(x) = f(x, u(x))$  con  $f(x, y) = (y^2 - 4)x^3$ . Essendo  $f$  di classe  $C^1$  il teorema di esistenza e unicità locale (Cauchy-Lipschitz) vale nell'intorno di ogni punto del piano  $(x, y)$ . Significa che la soluzione del problema di Cauchy dato non può toccare le due soluzioni costanti  $u = \pm 2$ . Per la caratterizzazione delle soluzioni massimali possiamo dedurre che la soluzione massimale del problema di Cauchy è definita su tutto  $\mathbb{R}$  (è globale). Il fattore  $u^2 - 4$  è sempre negativo visto che  $-2 < u < 2$  e dunque il segno di  $u'$  è uguale al segno di  $x^3$ . Dunque la soluzione è strettamente decrescente sull'intervallo  $x \geq 0$  e strettamente crescente sull'intervallo  $x \leq 0$ . Per  $x \rightarrow \pm\infty$  la soluzione, essendo monotona, ammette limite  $\ell$ . Tale limite dovrà essere minore di 2 (perché la soluzione parte da 2) e non inferiore a -2. Dimostriamo che  $\ell = -2$ . Se fosse  $\ell > -2$  sostituendo  $u \rightarrow \ell$  nell'equazione avremmo che  $u' \rightarrow \pm(\ell^2 - 4) \cdot \infty = -\infty$ . Ma è noto che se una funzione ha un asintoto orizzontale e la derivata ammette limite allora il limite della derivata deve essere nullo. Si ha quindi un assurdo e dunque  $\ell = -2$ .

Troviamo ora la soluzione analiticamente. Sapendo che  $u^2 - 4$  è sempre diverso da zero possiamo separare le variabili

$$\frac{u'}{u^2 - 4} = x^3$$

e integrare in  $dt$  per  $t$  che va da 0 a  $x$ :

$$\int_0^x \frac{u'(t)}{u^2(t) - 4} dt = \int_0^x t^3 dt$$

con la sostituzione  $u = u(t)$ ,  $du = u'(t)dt$  si ottiene

$$\int_{u(0)}^{u(x)} \frac{1}{u^2 - 4} du = \frac{x^4}{4}.$$

Utilizzando il metodo dei fratti semplici e ricordando che  $-2 < u < 2$  si ottiene

$$\int \frac{1}{u^2 - 4} du = \frac{1}{4} \int \left( \frac{1}{u - 2} - \frac{1}{u + 2} \right) du = \frac{1}{4} (\log(2 - u) - \log(2 + u))$$

da cui

$$\left[ \frac{1}{4} \log \frac{2-u}{2+u} \right]_{u(0)}^{u(x)} = \frac{x^4}{4}.$$

Ricordiamo che  $u(0) = 1$ , dunque otteniamo

$$\log \frac{2-u(x)}{2+u(x)} - \log \frac{1}{3} = x^4$$

ovvero

$$\frac{2-u(x)}{2+u(x)} = \frac{e^{x^4}}{3}$$

da cui

$$6 - 3u(x) = e^{x^4}(2 + u(x))$$

e quindi

$$u(x) = \frac{6 - 2e^{x^4}}{3 + e^{x^4}}.$$

□