

# Analisi Matematica A e B

## Prova scritta parziale n. 3

Laurea in Fisica, a.a. 2022/23  
Università di Pisa

22 aprile 2023

1. (i) Dire per quali  $\alpha \in \mathbb{R}$  esiste finito l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log^\alpha x}{x^3} dx.$$

- (ii) Calcolare l'integrale per ogni  $\alpha \in \mathbb{N}$ .

*Soluzione.* L'integrale improprio ha come punti "cattivi" i punti  $x = +\infty$  e, se  $\alpha < 0$ , il punto  $x = 1$ .

Chiamata  $f(x) = \frac{\log^\alpha x}{x^3}$  la funzione integranda si osserva che conoscendo gli ordini di infinito di log e potenza, per  $x \rightarrow +\infty$  si ha  $f(x) \ll \frac{1}{x^2}$ , qualunque sia  $\alpha$ . Dunque sapendo che l'integrale di  $\frac{1}{x^2}$  è convergente in un intervallo intorno di  $+\infty$ , per confronto asintotico possiamo dedurre che anche l'integrale di  $f(x)$  è convergente in tale intorno.

Per  $x \rightarrow 1$  si ha  $\log x \sim x - 1$  e quindi  $f(x) \sim \frac{1}{(x-1)^{-\alpha}}$ . Sapendo che  $\frac{1}{(x-1)^p}$  è integrabile in un intorno di  $x = 1$  se e solo se  $p < 1$ , per confronto asintotico deduciamo che anche l'integrale dato converge, in un intorno di  $x = 1$ , se e solo se  $\alpha > -1$ .

Dunque l'integrale dato converge se e solo se  $\alpha > -1$ .

Per il punto (ii) chiamiamo  $I_\alpha$  l'integrale dato e proviamo ad effettuare una integrazione per parti. Deriviamo il logaritmo e integriamo la potenza  $x^{-3}$ , se  $\alpha > 0$  si ha:

$$\begin{aligned} I_\alpha &= \int_1^{+\infty} \frac{\log^\alpha x}{x^3} dx \\ &= \left[ \log^\alpha x \cdot \frac{x^{-2}}{-2} \right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{\alpha \log^{\alpha-1} x}{x} \cdot \frac{x^{-2}}{-2} dx \\ &= [0 - 0] + \frac{\alpha}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\log^{\alpha-1} x}{x^3} dx = \frac{\alpha}{2} \cdot I_{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Se  $\alpha = 0$  si ha invece:

$$I_0 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = \left[ \frac{x^{-2}}{-2} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{2}.$$

Dunque se  $\alpha = n \in \mathbb{N}$  la successione  $I_n$  è definita ricorsivamente da:

$$\begin{cases} I_0 = \frac{1}{2} \\ I_{n+1} = \frac{n+1}{2} \cdot I_n \end{cases}$$

ed è facile verificare, con una dimostrazione per induzione, che risulta

$$I_n = \frac{n!}{2^{n+1}}.$$

Si può anche osservare che per tutti i valori  $\alpha > -1$  si può ricondurre l'integrale alla funzione  $\Gamma$  di Eulero:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Effettuando il cambio di variabile  $t = \log x$ ,  $dt = \frac{1}{x} dx$ , e poi  $2t = s$ ,  $dt = \frac{ds}{2}$  si ha infatti:

$$\begin{aligned} I_\alpha &= \int_1^{+\infty} \frac{\log^\alpha x}{x^2} \cdot \frac{1}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{e^{2t}} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\left(\frac{s}{2}\right)^\alpha}{e^s} \frac{1}{2} ds = \frac{1}{2 \cdot 2^\alpha} \int_0^{+\infty} s^\alpha e^{-s} ds \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{2^{\alpha+1}}. \end{aligned}$$

In effetti sappiamo che  $n! = \Gamma(n + 1)$  quindi questo risultato conferma il precedente. □

2. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$u'' + u' - 42u = 1 + e^{6x}. \quad (1)$$

*Soluzione.* Si tratta di una equazione differenziale lineare non omogenea del secondo ordine a coefficienti costanti. Il polinomio associato all'equazione è

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 42 = (\lambda + 6)(\lambda - 7).$$

Dunque le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono:

$$u_0(x) = c_1 e^{6x} + c_2 e^{-7x}.$$

Per determinare una soluzione particolare  $u_*$  dell'equazione non omogenea possiamo sfruttare il principio di sovrapposizione e il metodo di similarità. Osserviamo che il coefficiente 6 ha molteplicità 1 come radice del polinomio  $P$ , dunque cerchiamo una soluzione della forma:

$$u_*(x) = A + Bx e^{6x}.$$

Si avrà

$$\begin{aligned}u'_* &= (B + 6Bx)e^{6x}, \\u''_* &= (12B + 36Bx)e^{6x}.\end{aligned}$$

Sostituendo  $u = u_*$  nell'equazione non omogenea si ottiene

$$(12B + 36Bx)e^{6x} + (B + 6Bx)e^{6x} - 42(A + Bxe^{6x}) = 1 + e^{6x}$$

da cui

$$13Be^{6x} - 42A = 1 + e^{6x}$$

ovvero  $A = -\frac{1}{42}$  e  $B = \frac{1}{13}$ . Dunque  $u_*(x) = -\frac{1}{42} + \frac{1}{13}xe^{6x}$  e la soluzione generale dell'equazione differenziale non omogenea è, al variare di  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ :

$$u(x) = -\frac{1}{42} + \left(c_1 + \frac{1}{13}\right)e^{6x} + c_2e^{-7x}.$$

□

### 3. Data l'equazione differenziale

$$u'(x) = \frac{x}{u(x)} \sqrt{1 - u^2(x)} \quad (2)$$

- (i) dimostrare che il problema di Cauchy, relativo a questa equazione, con condizione iniziale  $u(0) = 1$  ammette una ed una sola soluzione data dalla funzione  $u(x) = 1$ , per ogni  $x \in \mathbb{R}$ .
- (ii) Si consideri il problema di Cauchy, relativo a (2), con condizione iniziale  $u(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Determinare **la soluzione** ed il relativo intervallo massimale di esistenza.
- (iii) (facoltativo) Determinare **le soluzioni** del problema di Cauchy, relativo a (2), con condizione iniziale  $u(1) = 1$ .

*Soluzione.* Si tratta di una equazione differenziale del primo ordine, in forma normale, a variabili separabili. Osserviamo che

- (a) l'equazione ha senso solamente se  $u(x) \in [-1, 1]$  e  $u(x) \neq 0$ ;
- (b) l'equazione non soddisfa il teorema di Cauchy-Lipschitz nei punti in cui  $u(x) = \pm 1$ ;
- (c) le funzioni costanti  $u(x) = 1$  e  $u(x) = -1$  sono soluzioni dell'equazione in quanto annullano sia il lato destro che il lato sinistro;
- (d) se  $u(x) > 0$  e  $x > 0$  allora  $u'(x) \geq 0$  e quindi  $u$  è crescente, se  $u(x) > 0$  e  $x < 0$  allora  $u'(x) \leq 0$  e quindi  $u$  è decrescente. In particolare una tale soluzione ha minimo in  $x = 0$ .

Per il punto (i) notiamo che da (b) sappiamo che  $u(x) = 1$  è una soluzione del problema di Cauchy ed effettivamente ha dato iniziale  $u(0) = 1$ . Inoltre visto che per (d) una tale soluzione ha minimo per  $x = 0$  e per (a) non può mai superare il valore 1 deduciamo che tale soluzione è l'unica con quel dato iniziale.

Per il punto (ii) cerchiamo una soluzione con dato iniziale  $u(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Visto che la soluzione deve essere continua e deve essere definita in un intervallo, per l'osservazione (a) dovrà assumere sempre valori compresi nell'intervallo  $(0, 1]$ . Per l'osservazione (b) non possiamo escludere che la soluzione possa incollarsi alla soluzione  $u(x) = 1$ . Visto che in  $x = 0$  la soluzione assume un valore  $\frac{\sqrt{3}}{2} < 1$  per continuità ci sarà un intervallo  $I$  intorno di  $x = 0$  in cui la soluzione assume valori strettamente compresi tra 0 e 1. In tale intervallo possiamo separare le variabili ed ottenere l'equazione

$$\frac{u(x) \cdot u'(x)}{\sqrt{1 - u^2(x)}} = x.$$

Se le funzioni coincidono anche le loro primitive coincidono:

$$\int \frac{u(x) \cdot u'(x)}{\sqrt{1 - u^2(x)}} dx = \int x dx$$

e con il cambio di variabile  $u = u(x)$ ,  $du = u'(x)dx$  si ottiene

$$\int \frac{u}{\sqrt{1 - u^2}} du = \int x dx$$

Una primitiva sul lato destro è banalmente  $x^2/2$ . Con il cambio di variabili  $t = 1 - u^2$ ,  $dt = -2u du$  si nota che anche il lato sinistro è un integrale immediato, e una primitiva è  $-\sqrt{1 - u^2}$ . Quindi si ottiene, per una qualche costante  $c \in \mathbb{R}$ :

$$-\sqrt{1 - u^2} + c = \frac{x^2}{2}$$

da cui

$$\sqrt{1 - u^2} = c - \frac{x^2}{2}.$$

Visto che il lato sinistro è sempre non negativo si dovrà avere, per ogni  $x \in I$ :

$$\frac{x^2}{2} \leq c. \quad (3)$$

Ricavando  $u(x)$  si ottiene

$$u^2 = 1 - \left(c - \frac{x^2}{2}\right)^2$$

e quindi, ricordando che deve essere  $u(x) > 0$ ,

$$u(x) = \sqrt{1 - \left(c - \frac{x^2}{2}\right)^2}. \quad (4)$$

Se vogliamo che la nostra soluzione soddisfi la condizione di Cauchy del punto (ii) dovrà essere

$$\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = c - \frac{0^2}{2}$$

da cui si trova facilmente  $c = \frac{1}{2}$  e quindi:

$$u(x) = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{(1-x^2)^2}{4}}.$$

Per (3) che questa soluzione è valida solamente nell'intervallo  $(-1, 1)$ . Ma quando  $x \rightarrow 1^-$  e quando  $x \rightarrow -1^+$  si ha che  $u(x) \rightarrow 1$  e quindi questa soluzione non è massimale in quanto si può estendere con il valore  $u = 1$  al di fuori dell'intervallo  $(-1, 1)$ . La soluzione rimane derivabile nei punti  $x = \pm 1$  in quanto l'equazione differenziale garantisce che anche le derivate coincidono in tali punti. Si ottiene quindi la soluzione massimale

$$u(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - \frac{(1-x^2)^2}{4}} & \text{se } |x| < 1 \\ 1 & \text{se } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Non ci possono essere altre soluzioni in quanto nell'intervallo  $(-1, 1)$  la soluzione è stata univocamente determinata ma le condizioni (a) e (d) impongono che la soluzione non possa più staccarsi dal valore 1 fuori da tale intervallo.

Per il punto (iii) osserviamo innanzitutto che entrambe le soluzioni del punto (i) e del punto (ii) soddisfano la condizione  $u(1) = 1$  e sono quindi due diverse soluzioni del problema di Cauchy con tale dato. Ci potrebbero però essere altre soluzioni. Per le osservazioni (a) e (d) sappiamo che se  $u(1) = 1$  allora  $u(x) = 1$  anche per ogni  $x \geq 1$ . Ma per ogni  $x_0 \in (0, 1]$  è possibile che la soluzione si stacchi dal valore 1 nel punto  $x_0$ . Se  $x_0 = 1$  si ottiene la soluzione del punto (ii) ma se  $x_0 < 1$  la soluzione potrà coincidere nell'intervallo  $[0, x_0]$  con la funzione data da (4). Imponendo la condizione  $u(x_0) = 1$  si trova

$$1 - (1^2) = c - \frac{x_0^2}{2}$$

Osserviamo infine che per  $x < 0$  la soluzione dovrà seguire la curva data da (4) finché  $u$  non assume nuovamente il valore 1. Per simmetria tale punto sarà  $-x_0$  e per ogni  $x \leq -x_0$  dovrà essere  $u(x) = 1$  per le osservazioni (a) e (d). Dunque in effetti la soluzione è sempre una funzione simmetrica (pari).

Quindi tutte le soluzioni del problema di Cauchy (iii) si scrivono nella forma

$$u(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - \frac{(x_0^2 - x^2)^2}{4}} & \text{per } |x| < x_0 \\ 1 & \text{per } |x| \geq x_0 \end{cases}$$

al variare di  $x_0 \in [0, 1]$ . □