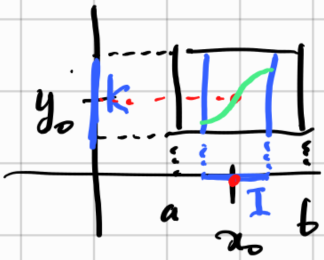
ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 78 - 21.4.2023



dim (continua)

Passo 2. $K = \{y \in \mathbb{R} : |y - y_0| \leq r\} = [y_0 - r, y_0 + r]$

$$T(u)(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u(t))\, dt$$

$u \in C^0(I, K)$ $\quad x_0 \in I \subseteq [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap [a, b]$

I intervallo.

δ piccolo quanto basta.

$$T : X = C^0(I, K) \longrightarrow C^0(I, \mathbb{R})$$

(2a) Voglio mostrare che $T(X) \subseteq X$

Sia $u \in X$, $v = T(u)$ $\quad v(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u(t))\,dt$

$$|v(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, u(t))\, dt \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{x_0}^{x} |f(t, u(t))|\, dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^{x} M\, dt \right| = |x - x_0| \cdot M \leq \delta \cdot M \overset{!}{\leq} r$$

Sia $M = \max\limits_{(x,y) \in [a,b] \times K} f(x, y)$ esiste finito per Weierstraß.

Vero se scegliamo $\delta \leq \frac{r}{M}$.

Dunque: $T : X \to X$

X è uno s. metrico completo $d = d_\infty$

(2b) T è una contrazione?

Dati $u_1, u_2 \in X$ devo mostrare

$$d_\infty(T(u_1), T(u_2)) \leq \tilde{L} \cdot d_\infty(u_1, u_2) \quad \text{con } \tilde{L} < 1.$$

$$|T(u_1)(x) - T(u_2)(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, u_1(t))\, dt - \int_{x_0}^{x} f(t, u_2(t))\, dt \right|$$

$$\leq \left| \int_{x_0}^{x} |f(t, u_1(t)) - f(t, u_2(t))|\, dt \right| \leq$$

$$\left[\text{Hyp: } |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L \cdot |y_1 - y_2| \right]$$

$$\leq \left| \int_{x_0}^{x} L \underbrace{|u_1(t) - u_2(t)|}\, dt \right| \leq L \left| \int_{x_0}^{x} d_\infty(u_1, u_2)\, dt \right|$$

$$= L \cdot d_\infty(u_1, u_2) \cdot |x - x_0| \leq L \cdot d_\infty(u_1, u_2) \cdot \delta \leq$$

$$\left[\text{scelgo } \delta \text{ in modo che } \delta < \frac{1}{L} \right]$$

$$\leq \tilde{L}\, d_\infty(u_1, u_2) \quad \text{con } \tilde{L} < 1.$$

$\square$

Oss: Se $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f \in C^1$

allora f soddisfa le ipotesi del teorema di Cauchy-Lipschitz.

Idea:

Lagrange:

$$\left|f(x,y_1) - f(x,y_2)\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,t)\right| \cdot \left|y_1 - y_2\right|$$

se $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ è continua $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|$ ha massimo L

su ogni compatto per Weierstraß.

$$\left|f(x,y_1) - f(x,y_2)\right| \leq L \cdot \left|y_1 - y_2\right|.$$

Lagrange: $\quad f(b) - f(a) = f'(t) \cdot (b-a)$

$\exists\, t \in (a,b)$

Generalizzazioni: il teorema vale per i sistemi del I ordine, ovvero per u a valori in $\mathbb{R}^n$.

$$\begin{cases} \underline{u}'(x) = \underline{f}(x, \underline{u}(x)) \\ \underline{u}(x_0) = \underline{y}_0 \end{cases}$$

vale anche per le equazioni (o anche per sistemi)

di ordine n:

$$\begin{cases} u^{(n)}(x) = f(x, \underbrace{u(x), u'(x), \dots, u^{(n-1)}(x)}_{\mathbb{R}^n}) \\ \left.\begin{array}{l} u(x_0) = y_0 \\ u'(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{array}\right\} \mathbb{R}^n \end{cases}$$

(con $x \in \mathbb{R}$)

Infatti basta prendere

$$\begin{cases} u_0 = u \\ u_1 = u' \\ \vdots \\ u_{n-1} = u^{(n-1)} \end{cases} \qquad \begin{cases} u_{n-1}' = f(x, u_0(x), \dots, u_{n-1}(x)) \\ u_{n-2}' = u_{n-1} \\ \vdots \\ u_1' = u_2 \\ u_0' = u_1 \\ u_0(x_0) = y_0 \\ u_1(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ u_{n-1}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

Teorema (esistenza globale) Sia $f : (a,b) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$(*) \begin{cases} u'(x) = f(x, u(x)) \\ u(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Se f soddisfa le ipotesi di C-L locale e inoltre: $\exists\, m, q$ tali che:

$$\| f(x,y) \| \leq m\,|y| + q$$

Allora $\exists\, u : (a,b) \to \mathbb{R}$ soluzione di $(*)$

e u è unica.

la soluzione è globale.

Lemma (Gronwall) sia $u : [a,b) \to \mathbb{R}$ tale che ($b > a$)

$$|u'(x)| \leq m\,|u(x)| + q \qquad \forall x \in [a,b)$$

allora u è limitata (se $b < +\infty$)

dim

$$\Big[\ln\big(1 + (u(t))^2\big) \Big]_a^x = \int_a^x \frac{2\,u(t)\cdot u'(t)}{1+(u(t))^2}\,dt$$

$$\leq \int_a^x \frac{2\,|u(t)|\cdot|u'(t)|}{1+(u(t))^2}\,dt$$

$$\overset{\text{ipotesi}}{\leq} \int_a^x \frac{2\,|u(t)|\cdot\big(m\,|u(t)| + q\big)}{1+u^2(t)}\,dt$$

$$\leq \int_a^x \frac{2m\,u^2(t) + 2q|u(t)|}{1+u^2(t)}\,dt$$

$$\frac{u^2}{1+u^2} \leq 1$$

$$\leq \int_a^x 2m \, dt + \int_a^x q \, dt$$

$$\left[\begin{array}{l} 0 \leq (1-|u|)^2 = 1+u^2-2|u| \\ \quad 2|u| \leq 1+u^2 \end{array} \right| \longrightarrow \frac{2|u|}{1+u^2} \leq 1 \Bigg]$$

$$= 2m(x-a) + q\cdot(x-a) = (2m+q)(x-a)$$

Dunque:

$$\ln\left(1+u^2(x)\right) \leq \ln\left(1+u^2(a)\right) + (2m+q)(x-a)$$

$$1+u^2(x) \leq C \, e^{(2m+q)(x-a)}$$

$$|u(x)| \leq \tilde{C} \, e^{\left(m+\frac{q}{2}\right)(x-a)}$$

$\square$

u è la soluzione del pb. di Cauchy

$\Rightarrow$ non può avere asintoti verticali

$\Rightarrow$ c'è esistenza globale.

<u>Corollario</u> le equazioni lineari hanno soluzione globale. (anche di ordine superiore.)

Teorema (struttura dello spazio delle sol. di una equazione lineare).

Consideriamo l'eq. lineare omogenea di ordine n:

$$L[u] = u^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) \cdot u^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x) \cdot u'(x) + a_0(x) u(x) = 0 \quad (*)$$

Se $a_k(x)$ sono funzioni continue definite su uno stesso intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$.
Allora le soluzioni sono definite anch'esse su I. || già detto

$$V = \operatorname{Ker} L = \{ u : I \to \mathbb{R} : \text{vale } (*) \}$$

Inoltre $V \subseteq C^n(I, \mathbb{R})$ e $\dim V = n$.

dim u deve essere derivabile n volte affinché l'equazione abbia senso.
$u^{(n)}$ è continua perché' $u^{(n)} = -\underset{\substack{\uparrow \\ C^0}}{a_{n-1}} \underset{\substack{\uparrow \\ C^0}}{u^{(n-1)}} - \dots - \underset{\substack{\uparrow \\ C^0}}{a_0} \underset{\uparrow}{u}$

Dimostriamo che $\dim V = n$. Fissato $x_0 \in I$.

$$V \xrightarrow{J} \mathbb{R}^n$$
$$u \longmapsto \begin{pmatrix} u(x_0) \\ u'(x_0) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}$$

J è suriettivo? Dato $y \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$

per C-L. $\exists\, u \in V$ t.c. $J(u) = y$.

J è iniettivo? se $J(u_1) = J(u_2) = y$

allora u_1 e u_2 sarebbero due soluzioni dello stesso pb. di Cauchy. C-L $\Rightarrow$ $u_1 = u_2$.

$\square$