ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 65 - 17.3.2023

Integrali impropri: servono di limiti, un limite per ogni punto cattivo: $\begin{cases} +\infty, -\infty \\ f \text{ non è localmente limitata (asintoti verticali).} \end{cases}$

Oss Se $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ è limitata.

$\int_a^b f$ è proprio o improprio?

Formalmente è improprio $\int_a^b f = \lim_{\alpha\to a^+}\int_\alpha^b f$.

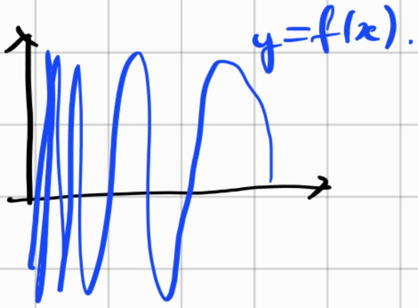
Ma basta estendere f: $\boxed{\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x\in(a,b] \\ 7 & \text{se } x=a. \end{cases}}$

$\tilde{f}$ è limitata su $[a,b]$. Se f è localmente R-integrabile anche $\tilde{f}$ lo è e:

$$\lim_{\alpha\to a}\int_\alpha^b f = \int_a^b \tilde{f}.$$

Es $f(x) = \sin\frac{1}{x}$

$$\int_0^1 \sin\frac{1}{x}\,dx$$



verificare che questo integrale converge.

CRITERI DI INTEGRABILITÀ

Teo Se $f \geq 0$, f local. R-integrabile, allora $\int_a^b f$ esiste. ← integrale improprio

dim

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f \qquad f \geq 0 \Rightarrow F \text{ crescente}$$

infatti
$$F(x+h) = F(x) + \underbrace{\int_x^{x+h} f}_{\geq 0} \geq F(x). \quad \text{se } h>0$$

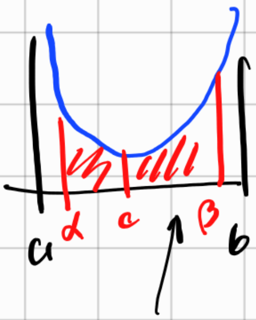
Se siamo ad esempio su $(a,b]$

$$\lim_{\alpha \to a} \int_\alpha^b f \ \text{ esiste} \geq 0$$

è monotona

Cosa succede se devo sommare questi limiti?

(a,b)



$$\int_a^b f = \lim_{\alpha \to a} \int_\alpha^c f + \lim_{\beta \to b} \int_c^\beta f$$

la somma non è una forma indeterminata

Teo (confronto) f, g localmente R-integrabile. $f \geq 0, g \geq 0$

- (puntuale). Se $f \geq g \geq 0$ $\quad \int_a^b f \geq \int_a^b g \geq 0$

  se $\int_a^b f$ è convergente $\Rightarrow$ $\int_a^b g$ è convergente

  se $\int_a^b g$ è divergente $\Rightarrow$ $\int_a^b f$ è divergente.

Es $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = [\arctg]_{-\infty}^{+\infty} = \pi$

già visto

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$ è convergente.

•• (asintotico $\ll$) Ci riduciamo ad un solo punto cattivo: $(a,b]$ (a è cattivo)

Se $f \geq 0$, $\boxed{f(x) \ll g(x)}$ per $x \to a^+$ [dim ci si riconduce al precedente]

se $\int_a^b g$ è convergente $\Rightarrow \int_a^b f$ è convergente

se $\int_a^b f$ è divergente $\Rightarrow \int_a^b g$ è divergente.

Esempio $e^{-x^2} \ll \frac{1}{x^2}$ per $x \to +\infty$

allora visto che $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}$ è convergente

dunque $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$ è convergente. $p=2>1$

••• (confronto asintotico $\sim$) su $(a,b]$

$f \geq 0$, $g \geq 0$, $f(x) \sim g(x)$ per $x \to a^+$.

allora $\int_a^b f$ e $\int_a^b g$ hanno lo stesso carattere (e non sono indeterminati)

Esempio $\int_0^1 \frac{1}{\sin x}dx = +\infty$ $\quad \frac{1}{\sin x} \sim \frac{1}{x}$ per $x \to 0$

Esempio $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x-\sin x)^p}\,dx$ Per quali p converge?

$$x - \sin x = \cancel{x} - \left(\cancel{x} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)$$

$$= \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$ è positivo in un intorno di 0.

$$= \underbrace{\frac{x^3}{6}}_{\text{positivo se } x>0} \cdot \underbrace{\left[1 + o(1)\right]}_{\text{positivo in un intorno di } 0.}$$

$$\sim \frac{x^3}{6}$$

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x-\sin x)^p}\,dx$ ha lo stesso carattere di $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{x^3}{6}\right)^p}$

$$\parallel$$

converge se $3p<1. \longrightarrow 6^p \cdot \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{3p}}\,dx$

$$\Updownarrow$$

$$p < \frac{1}{3}.$$

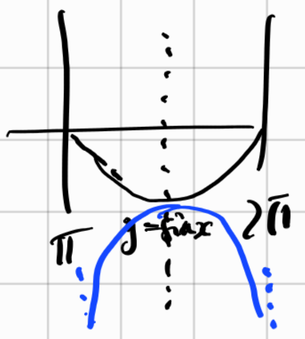
Oss Usiamo come campione:

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p} < +\infty \Leftrightarrow p<1$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} < +\infty \Leftrightarrow p>1.$, più in generale $\displaystyle\int_{x_0}^{b} \frac{1}{(x-x_0)^p}\,dx$

Ovviamente lo stesso vale in un punto $a \in \mathbb{R}$ $a \neq 0$.

$$\int_\pi^{2\pi} \frac{1}{\sin x} = -\int_\pi^{2\pi} \frac{1}{-\sin x}$$

$-\sin x \geq 0$ su $[\pi, 2\pi]$



2 punti cattivi: π e 2π

per $x \to \pi$ $\qquad \sin x = \sin\pi + \cos\pi \cdot (x-\pi) + o(x-\pi)$

$= \pi - x + o(x-\pi)$

$-\sin x \sim x-\pi \quad$ per $x \to \pi$

$$\boxed{\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{1}{-\sin x}\,dx}$$ ha lo stesso carattere di $\displaystyle\int_{\pi}^{3/2\pi} \frac{1}{x-\pi}\,dx$

$\parallel$

$+\infty$

$$+\infty = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t}\,dt \qquad /\!/ \quad \begin{cases} t = x-\pi \\ dt = dx \end{cases}$$

Lo stesso succede in 2π $\Rightarrow \displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{\sin x} = -\infty.$

Altri campioni:

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{x \cdot |\ln x|^p}\,dx$$

converge se $p > 1$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \cdot \ln^p x}\,dx$$

per la serie:

$$\sum \frac{1}{k \cdot \ln^p k}$$

Infatti $\begin{cases} y = \ln x \\ dy = \frac{1}{x}\,dx \end{cases}$

$$\int_{0^+ \text{ o } +\infty} \frac{1}{x \ln^p x}\,dx = \int_{-\infty \text{ o } +\infty} \frac{1}{y^p}\,dy$$

<u>Esempio</u> La funzione Γ di Eulero

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot t^{x-1}\,dt. \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Per quali x l'integrale converge?

punti cattivi: $+\infty$ per ogni x

0 se $x < 1$

• in $+\infty$ $\qquad e^{-t}\, t^{x-1} \ll \frac{1}{t^2}$ per $t \to +\infty$. $\qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} < +\infty$

Fissato x è convergente in un intorno di $+\infty$.

$\cdot$ in 0 $\quad e^{-t} \cdot t^{x-1} \sim t^{x-1}$ per $t \to 0$. $\quad \int_0^1 e^{-t} \cdot t^{x-1} dt$

è un integrale improprio se $x < 1$ $\quad \int_0^1 t^{x-1}$

ed è convergente se $1-x<1$.

cioè: $x>0$

$\Gamma : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ è ben definita.

Alcuni valori di Γ: $\quad \Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1$

$(x>0)$ per parti

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} \underset{\uparrow}{e^{-t}}\, \underset{\uparrow}{t^x}\, dt = -\int_0^{+\infty} \left(-e^{-t}\right) \cdot x\, t^{x-1}\, dt + \left[-e^{-t} \cdot t^x\right]_0^{+\infty}$$

$$= x \cdot \Gamma(x) + 0 - (-0) = x \cdot \Gamma(x).$$

$(*) \begin{cases} \Gamma(1) = 1 \\ \underline{\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n)} \end{cases}$ $\quad \boxed{\begin{cases} 0! = 1 \\ (n+1)! = (n+1) \cdot n! \end{cases}}$

$\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1$, $\Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2$

$\Gamma(4) = 3 \cdot \Gamma(3) = 6$, ...

$\boxed{\Gamma(n) = (n-1)!}$ $\quad \begin{cases} \underline{\Gamma(1) = 1} \\ \Gamma(n+2) = (n+1) \cdot \Gamma(n+1) \end{cases}$

Per casa $\quad \lim_{x \to 0} \Gamma(x) = +\infty$?

$\lim_{x \to +\infty} \Gamma(x) = +\infty$?

$\Gamma(x+1)$ estende il fattoriale da $\mathbb{N}$ a $(0, +\infty)$

Dove esce Γ. $\quad \bullet \quad \Gamma(\tfrac{1}{2})$ è equivalente a $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

$\bullet\bullet \quad |B^n| = \dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n}{2}\right)!}$ $\quad \begin{cases} n=2 & |B^2| = \pi \\ n=1 & |B^1| = |[-1,1]| = 2 \\ & \left(\frac{1}{2}\right)! = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \end{cases}$

APPUNTI

$n=3 \quad |B^3| = \frac{4}{3}\pi$

$$\frac{\pi\sqrt{\pi}}{\left(\frac{3}{2}\right)!} = \frac{\pi\sqrt{\pi}}{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)!} = \frac{\pi\cancel{\sqrt{\pi}}}{\frac{3}{2}\,\frac{\cancel{\sqrt{\pi}}}{2}} = \frac{4}{3}\pi$$

$n=0 \quad |B^0| = 1$