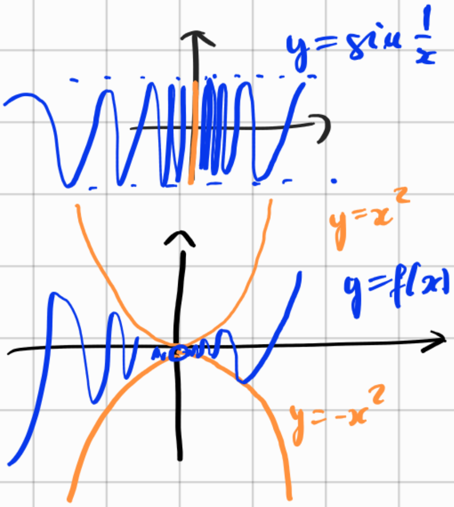
ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 41 - 20.1.2023

Esercizio $\quad f(x) = x^2 \cdot \sin\frac{1}{x}$



$x \neq 0$ è continua derivabile ∞ volte

$\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ non esiste

$\mathrm{Lim}_{x\to 0} \sin\frac{1}{x} = [-1,1]$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

$$\underset{\downarrow \atop 0}{-x^2} \le f(x) \le \underset{\downarrow \atop 0}{x^2}$$

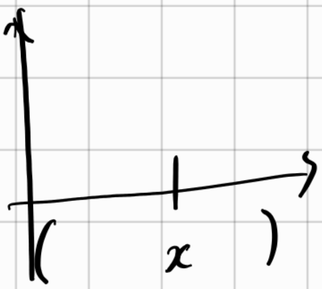
$$f(x) = \begin{cases} \boxed{x^2 \sin\frac{1}{x}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

f è continua perché per $x \neq 0$ perché f coincide con $x^2 \sin\frac{1}{x}$ localmente

f è continua anche in $x=0$ perché

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0 = f(0)$$

[



$(0, 2x)$ è un intorno di x che non contiene 0.]

f è derivabile? Se $x \neq 0$ $\quad f'(x) = \left(\boxed{x^2 \cdot \sin\frac{1}{x}}\right)'$

f è derivabile in x per ogni $x \neq 0$. è derivabile

f è derivabile in $x = 0$?

Uso la definizione:

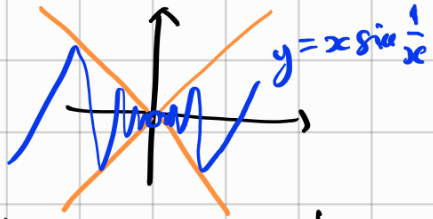
se esiste

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^{\cancel{2}} \sin\frac{1}{x}}{\cancel{x}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \underbrace{x}_{\to 0} \cdot \underbrace{\sin\frac{1}{x}}_{\text{limitata}} = 0$$



f è derivabile anche in $x = 0$ $\quad f'(0) = 0$

$$f'(x) = \begin{cases} \left(x^2 \cdot \sin\frac{1}{x}\right)' & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} \left(\underbrace{2x}_{\to 0} \cdot \underbrace{\sin\frac{1}{x}}_{\text{limitata}} - \cos\frac{1}{x}\right) \text{ non esiste.}$$

f' non è continua in $x = 0$.

f è derivabile ma f' non è continua.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \neq \lim_{x \to x_0} f'(x) = \lim_{x \to x_0} \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Def (classi di regolarità).

Chiamiamo $\mathcal{C}(A)$ l'insieme delle funzioni continue $f: A \to \mathbb{R}$

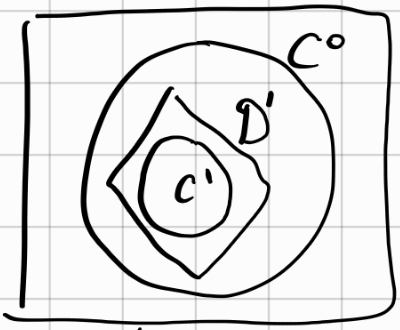
$\longrightarrow$ $\mathcal{D}(A)$ l'insieme delle funzioni derivabili $f: A \to \mathbb{R}$

Sappiamo che $\mathcal{C}(A) \supseteq \mathcal{D}(A)$

Posto $C^0(A) = C$, $C^1(A) = \{ f \in \mathcal{D}(A) : f' \in C^0(A) \}$

$\mathbb{R}^A = A \to \mathbb{R}$

$\underline{\underline{C^1(A) \subsetneq \mathcal{D}(A)}}$



<u>Notazione</u> Chiamo $f^{(k)}$ la derivata k-esima di f

$f^{\overbrace{''\,''\cdots''\,''}^{k}}$

$$\begin{cases} f^{(0)} = f \\ f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)' \end{cases}$$

$f^{(0)} = f$
$f^{(1)} = f'$
$f^{(2)} = f''$
$\vdots$
$f^{(4)} = f'''' = f^{iv}$
$f^{(5)} = f''''' = f^{v}$
$\vdots$

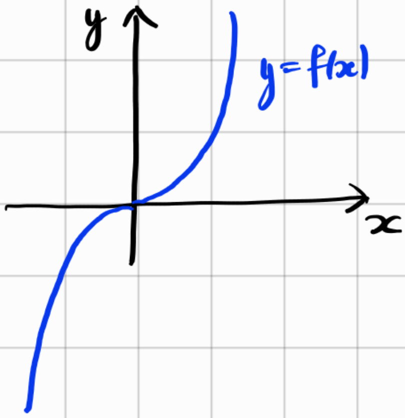
$f \in C^n$ se f è derivabile
f' è derivabile
$\vdots$
$f^{(n-1)}$ è derivabile
$f^{(n)}$ è continua.

$C^n = \{ f \in \mathcal{D} : f' \in C^{n-1} \}$ $\|$

$\uparrow$ concetto a fine lezione

Es $\quad f(x) = x\cdot|x|$

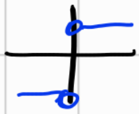
$$= \begin{cases} x^2 & \text{se } x\geq 0 \\ -x^2 & \text{se } x<0 \end{cases}$$



$\boxed{f\in C}$

[$|x|$ è derivabile se $x\neq 0$

la derivata è $\frac{x}{|x|}$


]

per $x\neq 0$ $\quad f'(x) = 1\cdot|x| + x\cdot\frac{x}{|x|} = |x| + \frac{x^2}{|x|} = |x| + \frac{|x|^{\cancel{2}}}{\cancel{|x|}}$

$= 2|x|.$ $\quad$ [a priori non posso concludere che $f'(0)=0$]

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}\cdot|x|}{\cancel{x}} = \lim_{x\to 0}|x| = 0$$

Effettivamente $\quad f$ è derivabile $\quad f\in D$

$$f'(x) = \begin{cases} 2|x| & \text{se } x\neq 0 \\ 0 & \text{se } x=0 \end{cases} = 2|x| \in C$$

$f'\in C^0 \Rightarrow f\in C^1$

ma $f'\notin D$ (non è derivabile in 0) $\quad f''(0)$ non esiste.

$\Rightarrow f\notin D^2 \Rightarrow f\notin C^2.$

Esercizio $\quad f(x) = \begin{cases} x^3\sin\frac{1}{x} & \text{se } x\neq 0 \\ 0 & \text{se } x=0 \end{cases}$

Per quali n $\quad f\in C^n$? $\quad f\in D^n$?

Domanda $\quad f(x) = x\cdot|x|$

Sapendo che $\lim_{x\to x_0} f'(x) = m$

posso concludere che $f'(x_0) = m$?

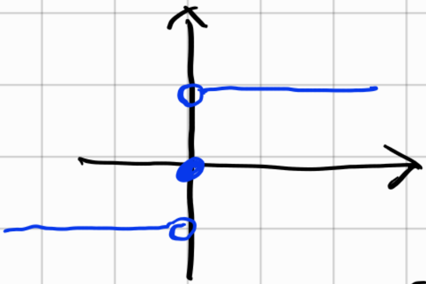
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Teo (criterio di derivabilità) Sia $f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo funzione continua in x_0 e derivabile per $x \neq x_0$

Se $\lim_{x \to x_0} f'(x) = m \in \mathbb{R}$ (esiste, finito)

Allora f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = m$.

Esempio



$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \quad \forall x \neq 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ \nexists & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 0} f'(x) = 0$ ma $f'(0)$ non esiste

---

dim

$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ se esiste

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x)$$

$x > x_0$

$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(y)$ per Lagrange su $[x_0, x]$

(f è continua su $[x_0, x]$
è derivabile su $(x_0, x]$)

$y \in [x_0, x]$ $\qquad y = y(x)$

per $x \to x_0$ $\qquad y \to x_0 \qquad f'(y) \to m$

$$\left[\lim_{y \to x_0} f'(y) = \lim_{x \to x_0} f'(x) \right]$$

perché questo so che esiste.

$\Rightarrow \quad f'(x_0) = m. \qquad \square$

<u>Teorema</u> (Cauchy) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$
f, g continue su $[a,b]$, derivabili su (a,b)
$g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b)$. Allora $g(b) \neq g(a)$:

$$\exists x \in (a,b) \quad \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

<u>dim</u> sbagliata
uso Lagrange

$$\frac{\dfrac{f(b) - f(a)}{\cancel{b-a}} = f'(x)}{\dfrac{g(b) - g(a)}{\cancel{b-a}} = g'(\cancel{x}\, y)} \qquad \square$$

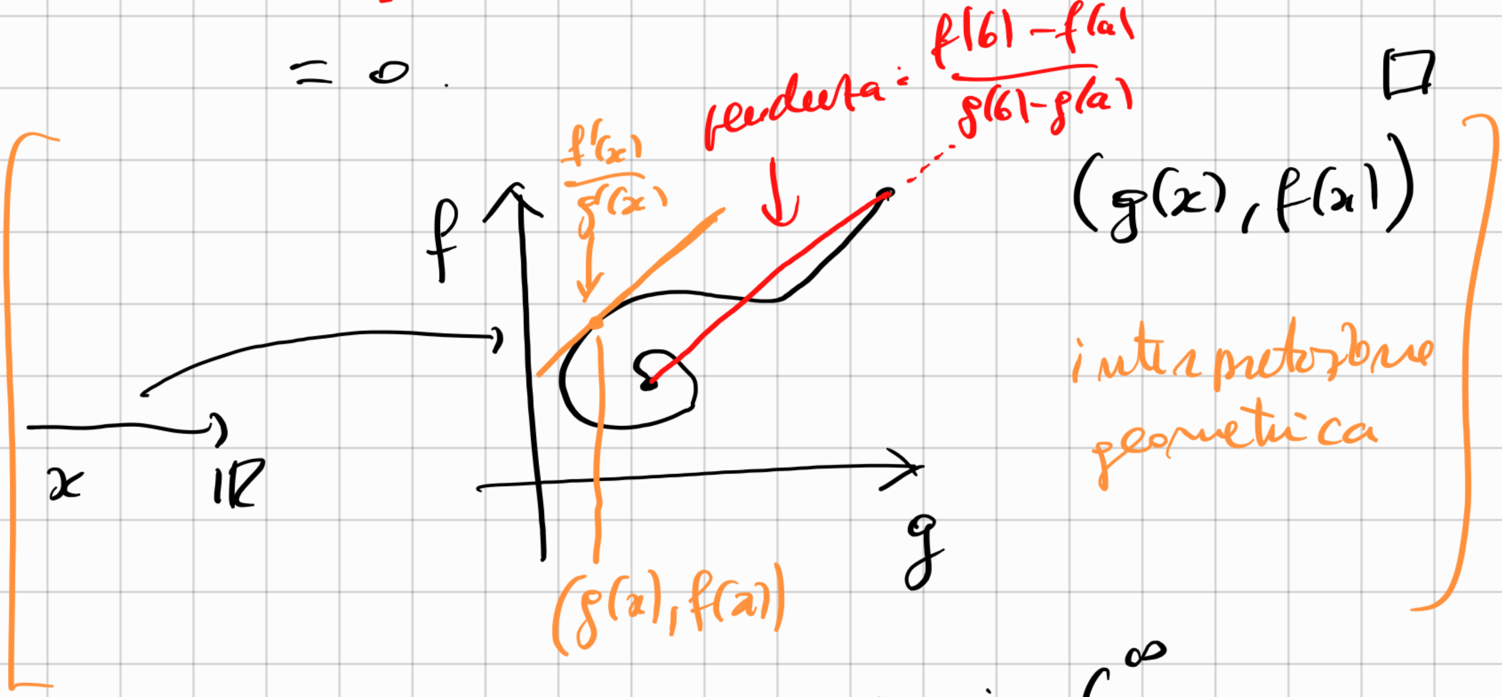
dim $\quad h(x) = (g(b)-g(a))f(x) - (f(b)-f(a))\,g(x)$

$$h'(x) = (g(b)-g(a))f'(x) - (f(b)-f(a))g'(x)$$

$$h'(x) = 0 \iff \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Se $h(a) = h(b)$ concludo grazie a Rolle.

$$h(a)-h(b) = (\cancel{g(b)} - \cancel{g(a)})f(a) - (\cancel{f(b)} - \cancel{f(a)})g(a)$$
$$- (\cancel{g(b)} - \cancel{g(a)})f(b) + (\cancel{f(b)} - \cancel{f(a)})\,g(b)$$
$$= 0. \qquad \square$$



C^∞

se k dispari

se k pari

$$|x|^{k+1} = x^{k+1}$$

$$\in$$

$$C^k \setminus C^{k+1}$$

$$|x| \in C^0 \setminus C^1$$

$$|x|^3 \in C^2 \setminus C^3$$

$$3\,|x|^2\,\frac{x}{|x|} = 3\,|x| \cdot x \quad \in C^1 \setminus C^2$$