ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 26 - 21.11.2022

SERIE NUMERICHE

a_n successione $\qquad \underbrace{a_0+a_1+a_2+\dots+a_{n-1}}_{S_n \text{ somma parziale}}+a_n+\dots$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$$

Se S_n ha limite denotiamo con

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \doteq \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} a_k$$

Se a_n è una successione

la serie associata è la successione $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$

serie $\qquad$ termine generico

Il carattere di una serie è il carattere della successione delle somme parziali

<u>Es</u> $\quad a_k = k^2 \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{P(n)}{6} \to +\infty$ $\quad$ ← polinomio di grado 3

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 = +\infty$$

La serie $\sum_{k=0}^{+\infty} k^2$ è divergente.

avrei dovuto scrivere $\sum_{k=0}^{n-1} k^2$

abuso di notazione

ES. LA SERIE GEOMETRICA

Scelto $q \in \mathbb{R}$, $a_k = q^k$, $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} q^k$

$$S_n = \begin{cases} \frac{1-q^n}{1-q} & \text{se } q \neq 1 \\ n & \text{se } q = 1 \end{cases}$$

$$S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}$$

$$q S_n = q + q^2 + \dots + q^{n-1} + q^n$$

$$S_n - q S_n = 1 - q^n$$

$$S_n = \frac{1-q^n}{1-q} \Leftarrow (1-q) S_n = 1 - q^n$$

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} q^k}_{\text{SERIE GEOMETRICA DI RAGIONE } q} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \lim_{n\to+\infty} S_n = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{se } |q|<1 \\ +\infty & \text{se } q \geq 1 \\ \text{indet.} & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

$q^n \to 0$ se $|q|<1$

$q^n \to$ $|q|>1$

$\sum q^n$ è $\begin{cases} \text{convergente} & \text{se } |q|<1 \\ \text{divergente} & \text{se } q \geq 1 \\ \text{indeterminata} & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}}$$

Quando scrivo $\sum a_n$ intendo la successione delle somme parziali $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$

Oss Il carattere di una serie non cambia se modifico un numero finito di termini (stabilità del carattere)

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \qquad T_n = \sum_{k=0}^{n-1} b_k$$

$$a_k = b_k \quad \forall k \geq N$$

$$\forall n > N \qquad S_n - T_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} b_k$$

$$= \sum_{k=0}^{N} a_k - \sum_{k=0}^{N} b_k = C \in \mathbb{R}$$

$$S_n = T_n + C$$

Oss $\displaystyle\sum_{k=M}^{+\infty} a_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=M}^{n-1} a_k$

ha lo stesso carattere di $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$

$\underline{a} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \qquad \underline{a} = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$

$C = \{ \underline{a} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum a_k \text{ è convergente} \}$

$$\Sigma : C \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$$
$$(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$$

Teo C è uno spazio vettoriale reale e $\Sigma : C \to \mathbb{R}$ è un operatore lineare.

ovvero:

Se $\sum a_k$ è convergente e $\sum b_k$ è convergente

Allora $\sum (a_k + b_k)$ è convergente

1 e $$\sum_{k=0}^{+\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k + \sum_{k=0}^{+\infty} b_k$$

e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ anche $\sum \lambda \cdot a_k$ è convergente

2 e vale $$\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda a_k = \lambda \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} a_k .$$

(proprietà distributiva)

2 $\lambda a_0 + \lambda a_1 + \lambda a_2 + \dots = \lambda (a_0 + a_1 + a_2 + \dots)$

1 $(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + \dots = (a_0 + a_1 + \dots) + (b_0 + b_1 + \dots)$

<u>Oss</u> $a_k = (-1)^k \qquad b_k = (-1)^{k+1} = -a_k$

$\sum (a_k + b_k) = \sum 0 = 0$

$\sum a_k$ è indeterminata $\quad 1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots$

$\sum b_k$ è indeterminata $\quad (-1) + 1 + (-1) + \dots$

$(1 + (-1)) + (-1 + 1) + (1 + (-1)) + \dots = 0 + 0 + \dots = 0$

dim (2) $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \qquad T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda a_k$

$$= \lambda \sum_{k=0}^{n-1} a_k = \lambda \cdot S_n$$

Se S_n è convergente $S_n \to S \in \mathbb{R}$

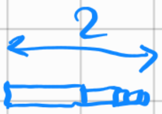
allora $T_n = \lambda \cdot S_n \to \lambda \cdot S \in \mathbb{R}$

(1) $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \qquad T_n = \sum_{k=0}^{n-1} b_k$

$$R_n = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k + \sum_{k=0}^{n-1} b_k = S_n + T_n$$

$$R_n \xrightarrow{n \to +\infty} S + T \qquad \square$$

Esercizio



$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

geometrica di ragione $q = \frac{1}{2}$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{3^k} \begin{cases} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k - 1 = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1 = \frac{1}{2} \\ \qquad\qquad \| \\ = \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{3^{k-1}} = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{1}{3}} \end{cases}$$

Problema (di Basilea) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ è convergente

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\dots$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots$$

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k}$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ è divergente

Noi studiamo il carattere di una serie ma raramente troviamo la somma.

Mengoli: $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+k}$ (SERIE TELESCOPICA)

fratti semplici

$$\frac{1}{k^2+k} = \frac{\cancel{k}+1-\cancel{k}}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}$$

$$= \left(1+\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{3}}+\dots+\cancel{\frac{1}{n}}\right) - \left(\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{3}}+\dots+\cancel{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \underbrace{\cancel{\frac{1}{n+1}}}_{\to 0}$$

$S_n \to 1$ per $n \to +\infty$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+k} = 1.$$

Criterio del confronto

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

$$\frac{1}{k^2+k} \leq \frac{1}{k^2} \leq \overset{k>1}{\frac{1}{k^2-k}}$$

$$\frac{1}{k^2-k} = \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{j\cdot(j+1)} \qquad j=k-1$$

$$T_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-k} = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1}} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} - \frac{1}{n} \longrightarrow 1.$$

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-k} = 2$$

$1 \leq R_n \leq 2$ $\qquad$ R_n è limitata.

R_n è crescente

$$\left(R_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n^2} = R_n + \frac{1}{n^2} \geq R_n \right)$$

R_n è convergente.

Esercizio $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = R \in \underbrace{[1,2]}$

Quanti termini devo sommare per ottenere una approssimazione di R a 2 cifre decimali?

Ovvero trovare n tale che $R - R_n < \frac{1}{100}$.

1. serie telescopiche
2. confronto
3. serie a termini positivi

1. Serie telescopiche

$a_k = b_k - b_{k-1}$

è telescopica.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} b_k - \sum_{k=1}^{n} b_{k-1} = \sum_{k=1}^{n} b_k - \sum_{k=0}^{n-1} b_k$$

$$= b_n - b_0 \longrightarrow \lim b_n - b_0$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \longleftrightarrow a_n = S_n - S_{n-1}. \qquad \square$$

$$\underline{S} = \sum \underline{a} \qquad \underline{a} = \Delta S$$

serie — successione

[Analogia $F = \int f$ — $f = DF$
(vedremo: teo. fondamentale del calcolo)]

3. Serie a termini positivi

Se $a_k \geq 0$ allora $\sum a_k$ è regolare.
(non è indeterminata)

quindi ha senso scrivere la somma:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \lim_{n \to +\infty} S_n = \sup S_n.$$

S_n è crescente

2. Criterio del confronto

Se $a_k \le b_k$ allora $S_n \le R_n$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \qquad R_n = \sum_{k=0}^{n-1} b_k$$

Se $\sum a_k$ converge ad S e $\sum b_k$ converge a R allora $S \le R$.

Se $0 \le a_k \le b_k$

allora $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \le \sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ (possono essere $+\infty$)

In particolare se $\sum b_k$ converge anche $\sum a_k$ converge

e se $\sum a_k$ diverge anche $\sum b_k$ diverge.

(Mengoli $0 \le \frac{1}{k^2} \le \frac{1}{k^2-k}$ se $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2-k}$ è convergente

allora $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ è convergente.

Esercizio. $\sum \frac{n^2+2n+3}{2n^4-n^3+n+1}$ è convergente.