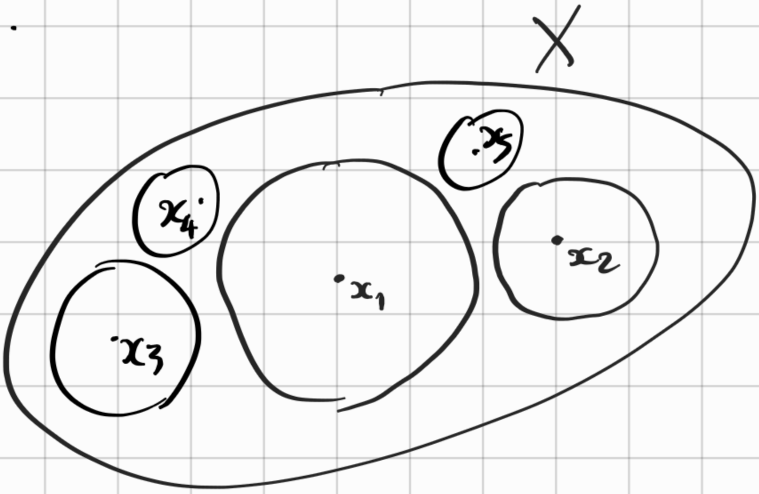
ELEMENTI DI CALCOLO DELLE VARIAZIONI
LEZIONE 7 - 20.3.2023

Lemma (ricoprimento tipo Vitali) Sia X spazio metrico totalmente limitato (se $X \subseteq \mathbb{R}^n$ significa X limitato)
Sia $\rho: X \to (0,+\infty)$. Allora esiste un insieme al più numerabile di punti x_k tali che:

1. le palle $B_{\rho(x_k)}(x_k)$ sono a 2 a 2 disgiunte
2. $X \subseteq \bigcup_k B_{3\rho(x_k)}(x)$.



dim

Se $\sup \rho = +\infty$
Ci sarebbe una palla che ricopre tutto X.

Supponiamo $\sup_X \rho < +\infty$

$\exists\, x_1 \in X$ t.c. $\rho(x_1) \geq \frac{1}{2} \sup_{x \in X} \rho(x)$

$\exists\, x_2 \in X$ t.c.

$$B_{\rho(x_2)}(x_2) \cap B_{\rho(x_1)}(x_1) = \emptyset$$

$$\rho(x_2) \geq \frac{1}{2} \sup \left\{ \rho(x) : B_{\rho(x)}(x) \cap B_{\rho(x_1)}(x_1) = \emptyset \right\}$$

$\vdots$

$x_{k+1} \in X$ t.c. $B_{\rho(x_{k+1})}(x_{k+1}) \cap \bigcup_{j=1}^{k} B_{\rho(x_j)}(x_j) = \emptyset$

$$\rho(x_{k+1}) \geq \frac{1}{2} \sup \left\{ \rho(x) : B_{\rho(x)}(x) \cap \bigcup_{j=1}^{k} B_{\rho(x_j)}(x_j) = \emptyset \right\}$$

Caso 1 | Questo processo potrebbe terminare in un numero finito di passi se l'insieme

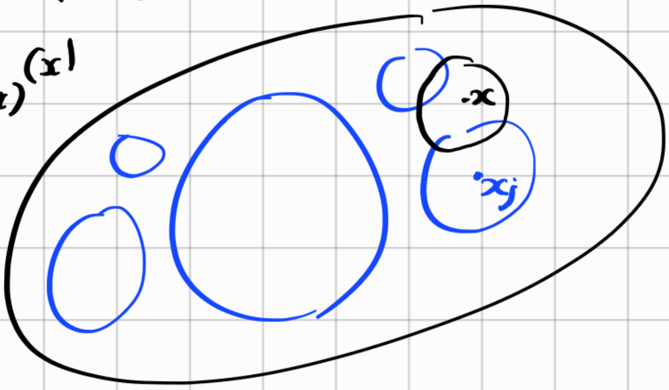
$$(\ast) \quad \boxed{\left\{ x : B_{\rho(x)}(x) \cap \bigcup_{j=1} B_{\rho(x_j)}(x_j) = \emptyset \right\}}$$

risulta vuoto.

Per costruzione $x_1, \dots, x_k$ soddisfano la condizione 1, verifichiamo che soddisfino anche 2:

$\forall x \in X$ → se $x = x_j$ allora ok.

↳ altrimenti $B_{\rho(x)}(x)$ deve intersecare una delle palle già scelte, sia x_j il punto scelto che mi esclude per la prima volta x.



Allora $B_{\rho(x_j)}(x_j) \cap B_{\rho(x)}(x) \neq \emptyset$ (i)

e $\rho(x_j) \geq \frac{1}{2} \rho(x)$. (ii)

$$d(x, x_j) \underset{(T)}{<} \rho(x) + \rho(x_j) \leq 2\rho(x_j) + \rho(x_j) = 3\rho(x_j)$$

$$\Rightarrow x \in B_{3\rho(x_j)}(x_j).$$

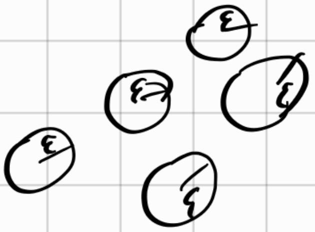
Caso 2 | l'insieme $(\ast)$ non diventa mai vuoto e allora ho una successione infinita: $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$

Claim $\rho(x_k) \to 0$. Altrimenti avrei:

$$\limsup_{k} \rho(x_k) > 0$$

ovvero $\varepsilon > 0$, k_j, t.c. $\rho(x_{k_j}) > \varepsilon \quad \forall j$

$B_\varepsilon(x_{k_j})$ sarebbero



tutte disgiunte. Ma X è totalmente limitato e quindi esistono finiti $y_1 \dots y_N$ tali che

$$\bigcup_{i=1}^{N} B_{\varepsilon/2}(y_i) \supseteq X \supseteq \{x_{k_j} : j \in \mathbb{N}\} = \#$$

ma allora $\exists\, i$: $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y_i)$ contiene almeno 2 punti dell'insieme $\#$.

$x_a, x_b \qquad d(x_a, x_b) < \varepsilon$

$\Rightarrow \; B_\varepsilon(x_a) \cap B_\varepsilon(x_b) \neq \emptyset$

Dato $x \in X$ devo mostrare che $\exists k$: $x \in B_{3\rho(x_k)}(x_k)$.

Se $\exists\, k : x = x_k$ ok.

Altrimenti x non viene mai scelto. Se x viene ad un certo punto escluso allora prendo il primo k che mi esclude x:

$$\begin{cases} B_{\rho(x_k)}(x_k) \cap B_{\rho(x)}(x) \neq \emptyset \\ \text{ma} \quad \rho(x_k) \geq \frac{1}{2}\rho(x). \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Concludo come nel caso finito.

Altrimenti x non viene mai escluso, ma allora

$$\rho(x_k) \geq \frac{1}{2}\rho(x) \quad \forall k$$

assurdo perché $\rho(x_k) \to 0$. $\square$

Teorema (derivazione di Lebesgue). $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ aperto,

$f \in L^1_{loc}(\Omega)$ allora per q.o. $x \in \Omega$ si ha:

$$\lim_{\rho \to 0} \fint_{B_\rho(x)} |f - f(x)| = 0 \quad \overset{(*)}{\Longrightarrow} \quad f(x) = \lim_{\rho \to 0} \fint_{B_\rho(x)} f(y)\,dy$$

dim Oss 1 possiamo assumere $f \in L^1(\Omega)$
(perché Ω è unione numerabile di B_ρ)

Sappiamo che: $C^0(\Omega) \cap L^1(\Omega)$ è denso in $L^1(\Omega)$
cioè esiste $f_n \to f$ in L^1 f_n continue.

Sappiamo che: se $f_n \to f$ in L^1 esiste $f_{n_k}(x) \to f(x)$ per q.o. $x \in \Omega$.

Se f fosse continua in x: $\fint_{B_\rho(x)} f \to f(x)$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \rho > 0$ t.c. $|f - f(x)| \leq \varepsilon \Rightarrow \fint_{B_\rho(x)} |f - f(x)| \leq \varepsilon$

$$\Rightarrow \fint_{B_\rho(x)} |f - f(x)| \to 0$$

$(*)$ $$\left| \fint_{B_\rho(x)} f - f(x) \right| = \left| \fint_{B_\rho(x)} f - \fint_{B_\rho(x)} f(x) \right| = \left| \fint_{B_\rho(x)} f - f(x) \right| \leq \fint_{B_\rho(x)} |f - f(x)| \to 0$$

per $\rho \to 0$

quindi $\fint_{B_\rho(x)} f \to f(x)$

Vorrei trasferire l'enunciato da $f \in L^1$ a $f_n \in C^0$:

$$(\#) \quad \fint_{B_\rho(x)} |f - f(x)| \leq \fint_{B_\rho(x)} |f - f_n| + \underbrace{\fint_{B_\rho(x)} |f_n - f_n(x)|}_{\downarrow \text{ per } \rho \to 0 \atop 0} + \fint_{B_\rho(x)} |f_n(x) - f(x)|\,dy$$

$$\fint_{B_\rho(x)} |f_n(x) - f(x)|\,dy = |f_n(x) - f(x)|$$

$\boxed{C}$ $\boxed{A}$

- $A_\varepsilon^n = \{ x \in \Omega : \exists m \geq n : |f_m(x) - f(x)| > \varepsilon \}$

$$C_\varepsilon^n = \{ x \in \Omega : \limsup_{\rho \to 0} \fint_{B_\rho(x)} |f - f_n| > \varepsilon \}$$

$A_\varepsilon^{n+1} \subseteq A_\varepsilon^n$ $\qquad A_\varepsilon^n \searrow A_\varepsilon^\infty$ (con ε fissato $n \to \infty$)

dove $A_\varepsilon^\infty = \bigcap_n A_\varepsilon^n$

$f_n \in C^0$ tc. $f_n \to f$ in L^1 e anche $f_n \to f$ q.o.

se x è tale che $f_n(x) \to f(x)$ $\quad x \notin A_\varepsilon^n$ definitivamente.

$A_\varepsilon^\infty \subseteq \{ x : \text{non } f_n(x) \to f(x) \} \Rightarrow |A_\varepsilon^\infty| = 0$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} |A_\varepsilon^n| = |A_\varepsilon^\infty| = 0.$$

Fissato ε scegliamo $\bar{n} = \bar{n}(\varepsilon)$ t.c. $|A_\varepsilon^{\bar{n}}| < \varepsilon$

e $\int_\Omega |f - f_{\bar{n}}| < \varepsilon^2$ $\qquad$ ($f_n \to f$ in L^1)

Poniamo $A_\varepsilon = A_\varepsilon^{\bar{n}}$, $C_\varepsilon = C_\varepsilon^{\bar{n}}$.

Per concludere la dimostrazione basta mostrare che

$|C_\varepsilon| \to 0$ per $\varepsilon \to 0$.

Infatti se $\exists \varepsilon > 0$ tc. $x \notin A_\varepsilon \cup C_\varepsilon$

allora $\lim_{\rho \to 0} \fint_{B_\rho(x)} |f - f(x)| \leq \varepsilon + 0 + \varepsilon$ (per (#))

Dimostriamo $|C_\varepsilon| \to 0$ per $\varepsilon \to 0$.

$$C_\varepsilon = \left\{ x \in \Omega : \limsup_{\rho \to 0} \fint_{B_\rho(x)} |f - f_{\bar{n}}| > \varepsilon \right\}$$

$\forall x \in C_\varepsilon \ \exists \rho(x)$ t.c. $\displaystyle\fint_{B_{\rho(x)}(x)} |f - f_{\bar{n}}| \geq \frac{\varepsilon}{2}$

ovvero (**) $\displaystyle\int_{B_{\rho(x)}(x)} |f - f_{\bar{n}}| \geq \frac{\varepsilon}{2} |B_{\rho(x)}(x)|$

Per il lemma di ricoprimento esistono $x_k \in C_\varepsilon$ t.c. $B_{\rho(x_n)}(x_n)$ sono a 2 a 2 disgiunte e le palle $B_{3\rho(x_n)}(x_n)$ coprono C_ε.

$$|C_\varepsilon| \leq \sum_k |B_{3\rho(x_k)}(x_k)| = 3^d \cdot \sum |B_{\rho(x_k)}(x_k)| \overset{(**)}{\leq} 3^d \cdot \frac{2}{\varepsilon} \int_{B_{\rho(x_k)}(x_k)} |f - f_{\bar{n}}|$$

$$\leq 3^d \cdot \frac{2}{\varepsilon} \int_\Omega |f - f_{\bar{n}}| \leq 3^d \frac{2}{\varepsilon} \cdot \varepsilon^2 = 2 \cdot 3^d \cdot \varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$$

$\square$

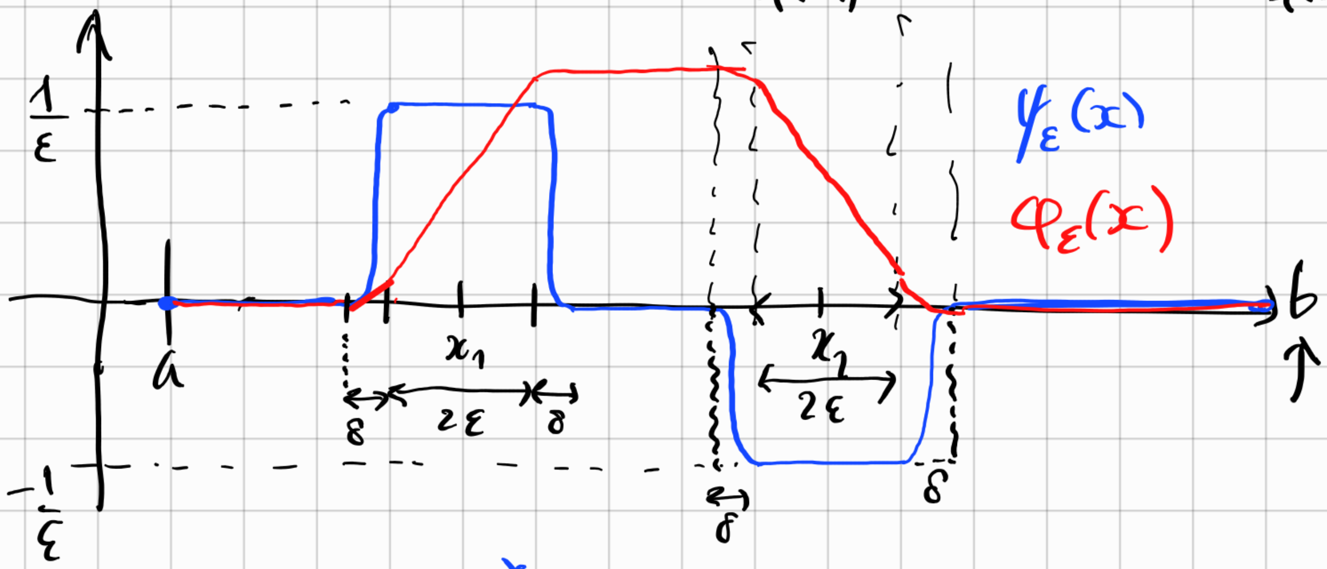
<u>Lemma fondamentale del calcolo delle variazioni II</u>

Sia $f \in L^1([a,b])$ t.c. $\int_a^b f \cdot \varphi' = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty((a,b))$.

Allora $\exists\, c \in \mathbb{R} : \quad f(x) = c$ per q.o. $x \in [a,b]$.

<u>dim</u> Per il teorema di Lebesgue basta mostrare che

$f(x_1) = f(x_2)$ se x_1, x_2 sono punti di Lebesgue cioè $\quad f(x_1) = \lim_{\rho\to 0} \fint_{B_\rho(x_1)} f \quad , \quad f(x_2) = \lim_{\rho\to 0} \fint_{B_\rho(x_2)} f.$



$$\varphi_\varepsilon(x) = \int_a^x \psi_\varepsilon(t)\,dt \qquad \varphi_\varepsilon \in C_c^\infty([a,b])$$

$\varphi_\varepsilon(x)$:

$$\varphi_\varepsilon(x) = 0 \quad \text{se } x \notin B_{\varepsilon+\delta}(x_1) \cup B_{\varepsilon+\delta}(x_2)$$

$$\varphi_\varepsilon'(x) = \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{su } B_\varepsilon(x_1)$$

$$\varphi_\varepsilon'(x) = -\frac{1}{\varepsilon} \quad \text{su } B_\varepsilon(x_2)$$

$$A_\varepsilon^\delta = B_{\varepsilon+\delta} \setminus B_\varepsilon(x_1) \cup B_{\varepsilon+\delta} \setminus B_\varepsilon(x_2)$$

$$|\varphi_\varepsilon'(x)| \leq \frac{1}{\varepsilon} \qquad \text{se } x \in A_\varepsilon^\delta.$$

$$0 = \int_a^b f \cdot \varphi_\varepsilon' = \underbrace{\int_{B_\varepsilon(x_1)} f \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}_{\shortparallel} + \underbrace{\int_{B_\varepsilon(x_2)} f \cdot \left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)}_{\shortparallel} + \int_{A_\varepsilon^\delta} f \cdot \varphi_\varepsilon'$$

$$2\left[\fint_{B_\varepsilon(x_1)} f \qquad - \fint_{B_\varepsilon(x_2)} f\right] + \int_{A_\varepsilon^\delta} f \cdot \varphi_\varepsilon'$$

$$\overset{\varepsilon \to 0}{\downarrow} \qquad \downarrow$$

$$2\left[f(x_1) \quad - \quad f(x_2) \right]$$

Basta mostrare che $\int_{A_\varepsilon^\delta} f \cdot \varphi_\varepsilon' \to 0$ per $\varepsilon \to 0$

$$\left| \int_{A_\varepsilon^\delta} f \cdot \varphi_\varepsilon' \right| \leq \int_{A_\varepsilon^\delta} |f| \cdot \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \int_{A_\varepsilon^\delta} |f|$$

Se $|A_\varepsilon^\delta| \to 0$ $\quad \int_{A_\varepsilon^\delta} |f| \to 0$

$\forall \varepsilon$ Posso scegliere δ abbastanza piccolo in modo

che $\int_{A_\varepsilon^\delta} |f| < \varepsilon^2$

$\square$.