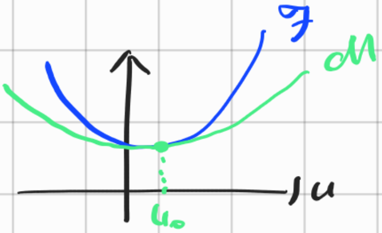
ELEMENTI di CALCOLO delle VARIAZIONI
LEZIONE 3 - 6.3.2023



Lemma (banale)

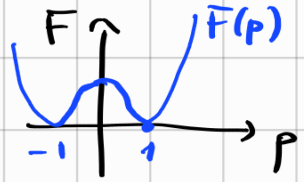
- $\mathcal{M}(u) \leq \mathcal{F}(u)$
- $\mathcal{M}(u_0) = \mathcal{F}(u)$
- u_0 è minimo di $\mathcal{M}$.

allora u_0 è minimo di $\mathcal{F}$.

dim

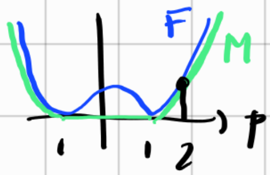
$$\mathcal{F}(u) - \mathcal{F}(u_0) \overset{\cdot\cdot}{\geq} \mathcal{M}(u) - \mathcal{M}(u_0) \overset{\cdot\cdot\cdot}{\geq} 0 \qquad \square$$

Esempio
$$\begin{cases} \mathcal{F}(u) = \int_0^1 \left(1 - (u')^2\right)^2 dx \to \min \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 2 \end{cases}$$



$$F(p) = (1-p^2)^2$$

Idea
$$\mathcal{M}(u) = \int_0^1 M(u')\,dx$$



$$M(p) = \begin{cases} F(p) & \text{se } |p| \geq 1 \\ 0 & \text{se } |p| \leq 1. \end{cases}$$

se trovo u_0 minimo di $\mathcal{M}$ e se $\mathcal{F}(u_0) = \mathcal{M}(u_0)$ allora u_0 è minimo anche per $\mathcal{F}$.

E.L. per $\mathcal{M}$:
$$\left[\underset{\overset{\|}{0}}{M_z} = \frac{d}{dx} M_p \right]_{\text{su } u}$$

$$\boxed{M_p(u'(x)) = \text{cost}}$$

$$M_p = \begin{cases} 2(1-p^2)(-2p) & \text{se } |p| > 1 \\ 0 & \text{se } |p| \leq 1 \end{cases}$$

u' è costante quando $|u'| > 1$.
è qualunque se $|u'| \leq 1$. ← è incompatibile con il dato al bordo ‖ se $u \in C^1$

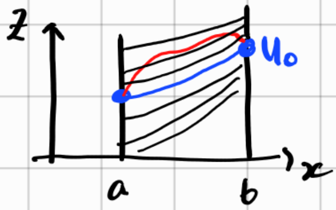
L'unica possibilità è che $u' = m$.

$$u(x) = mx + q \qquad u(0)=0,\ u(1)=2$$

$$u(x) = 2x.$$

$u_0(x) = 2x$ è minimo di $\mathcal{M}$.
ma $\mathcal{F}(u_0) = \mathcal{M}(u_0)$ $\Rightarrow$ u_0 è minimo di $\mathcal{F}$. $\square$

CALIBRAZIONI



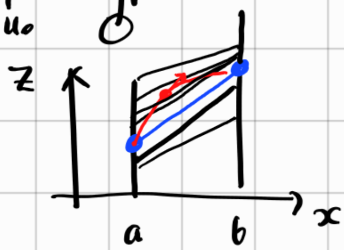
u_0 minimo se $\boxed{\mathcal{F}(u)-\mathcal{F}(u_0)\geq 0}$ $\forall u$.

$$\begin{cases} \mathcal{F}(u) = \int_a^b F(x,u,u')\,dx \to \min \\ u(a) = u_a \\ u(b) = u_b \end{cases}$$

ω esatta $\Leftarrow$ $d\omega = 0$ $\Uparrow$ E.L.

Idea: $\mathcal{F}(u) - \mathcal{F}(u_0) \geq \int_{\Gamma_u} \omega - \int_{\Gamma_{u_0}} \omega = 0$.

$\Gamma_u(x) = (x, u(x))$



ES GEODETICHE

Primo passo: se $\omega = dS$, $S = S(x,z)$

$$\int_a^b \frac{d}{dx}\big(S(x,u(x))\big)\,dx = \big[S(x,u(x))\big]_a^b = S(b,u(b)) - S(a,u(a))$$

costante se u ha dato al bordo fissato

$$\int_a^b \big[S_x(x,u) + S_z(x,u)\,u'(x)\big]\,dx$$

$$\mathcal{M}(u) = \int_a^b M(x,u(x),u'(x))\,dx \qquad \boxed{M(x,z,p) = S_x(x,z) + S_z(x,z)\cdot p}$$

LAGRANGIANA NULLA

$$\mathcal{M}(u) - \mathcal{M}(u_0) = 0$$

Sceglieremo: $\boxed{\omega = \alpha(x,z)\cdot dx + \beta(x,z)\,dz}$

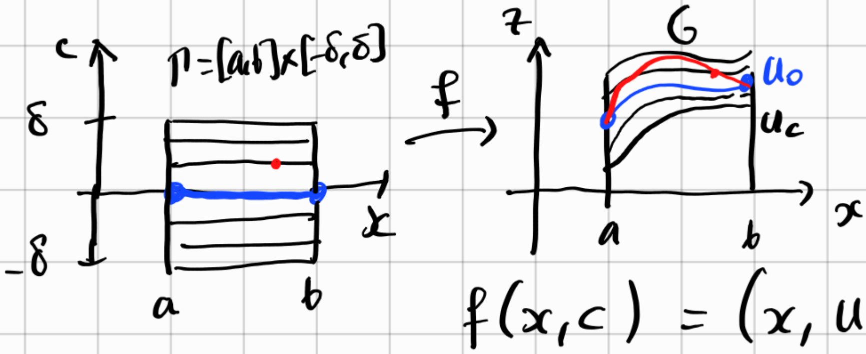
$$\int_{\Gamma_u} \alpha\cdot dx + \beta\, dz = \int \underbrace{\alpha(x,u(x))}\,dx + \underbrace{\beta(x,u(x))\cdot u'(x)}\,dx$$

$$\Gamma_u(x) = (x, u(x)) \qquad = \int \left[S_x(x,u(x)) + S_z(x,u(x))\,u' \right] dx$$

$$\begin{cases} x = x \\ z = u(x) \end{cases}$$

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \alpha\, dx + \beta\, dz = \int \left[\alpha(\gamma(t))\, x'(t) + \beta(\gamma(t))\, z'(t) \right] dt \qquad \gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Passo 2 Supponiamo di avere una fibrazione dello spazio (x,z).



$$f(x,c) = (x, u_c(x))$$

$G = f(\Gamma)$

$f : \Gamma \to G$ bigettiva.

G "intorno" del grafico di u_0

G semplicemente connesso

Dico che ω è adattato alla fibrazione u_c se
$$\mathcal{F}(u_c) = \int_{\Gamma_{u_c}} \omega \qquad \forall c.$$

Dico che ω è estremale se u_c risolve E.L. $\forall c$.

Dico che ω è ottimale se $\mathcal{F}(u) \geq \int_{\Gamma_u} \omega$ quando u ha lo stesso dato al bordo di u_0.

EQUAZIONI di CARATHEODORY

Cosa significa $\mathcal{F}(u_c) = \int_{\Gamma_{u_c}} \omega$ $\qquad \omega = \alpha\, dx + \beta\, dz$

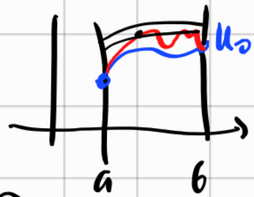
$$\mathcal{F}(u_c) = \int_a^b F(x,u_c,u_c')\, dx = \int_a^b \left[\alpha(x,u_c) + \beta(x,u_c)\, u_c' \right] dx$$

$$\mathcal{F}(u) \geq \int_{\Gamma_u} \omega$$

$$\S \quad \mathcal{J}(u) = \int_a^b F(x,u,u')\,dx \geq \int \left[\alpha(x,u) + \beta(x,u)\,u'\right] dx$$

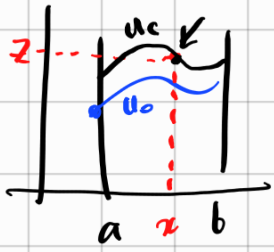
$$\Uparrow$$

Impongo: $\forall x,z \in G$, $p \in \mathbb{R}$ $\quad \underbrace{F(x,z,p) \geq \alpha(x,z) + \beta(x,z)\cdot p}$



$$\begin{cases} \mathcal{J}(u) \geq \int_{\Gamma_u} \omega \\ \mathcal{J}(u_c) = \int_{\Gamma_{u_c}} \omega \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} F(x,z,p) \geq \alpha(x,z) + \beta(x,z)\cdot p \\ F(x,z,\wp) = \alpha(x,z) + \beta(x,z)\,\wp \end{cases}$$

dove $\wp = \wp(x,z) = u_c'(x)$ con $u_c(x) = z$.



Fissato (x,z) $\quad p \mapsto F(x,z,p)$ ha $\alpha + \beta p$ come retta di supporto.

$h(p) := F(x,z,p) - \left[\alpha(x,z) + \beta(x,z)\cdot p\right]$ ha minimo in $p = \wp$

questo è garantito se $\forall (x,z)$ $\quad p \mapsto F(x,z,p)$ è convessa in p $\leftarrow$ Prendiamo questa come ipotesi

$h(p)$ ha minimo per $p = \wp \Rightarrow h'(\wp) = 0$

$h'(p) = F_p(x,z,p) - \beta(x,z)$:

$h(\wp) = 0$:

$$\boxed{\begin{cases} \beta(x,z) = \underbrace{F_p(x,z,\wp(x,z))} \\ \alpha(x,z) = F(x,z,\wp) - F_p(x,z,\wp)\cdot\wp \end{cases}}$$

EQUAZIONI di CARATHEODORY

$$\omega = \alpha\,dx + \beta\,dz$$