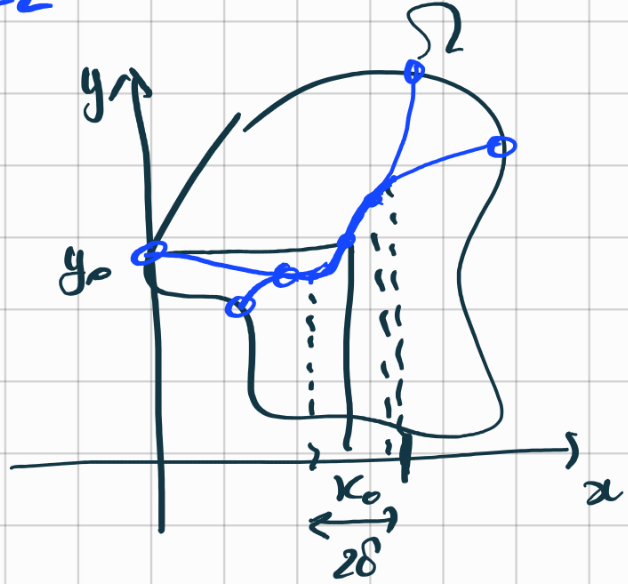
ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 78 - 11.4.2022



Cauchy-Lipschitz ($\exists!$ locale)

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u(x)) \\ u(x_0) = y_0 \end{cases}$$

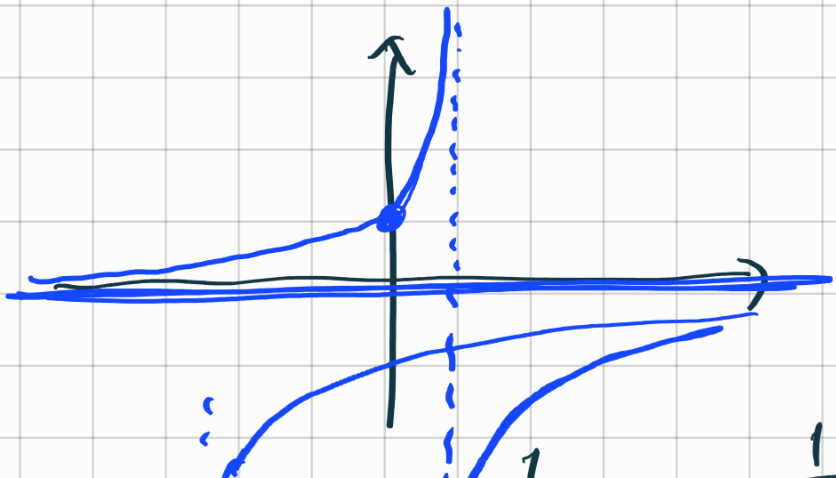
$$f : \Omega \to \mathbb{R}$$

Teorema (soluzioni massimali)

"le sol. massimali raggiungono la frontiera di Ω"

ES. $\begin{cases} u'(x) = u^2(x) \\ u(0) = 1 \end{cases}$ | $f(x,y) = y^2$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\frac{u'(x)}{u^2(x)} = 1$$



$$\int \frac{du}{u^2} = x - c$$

$$-\frac{1}{u(x)} = x - c$$

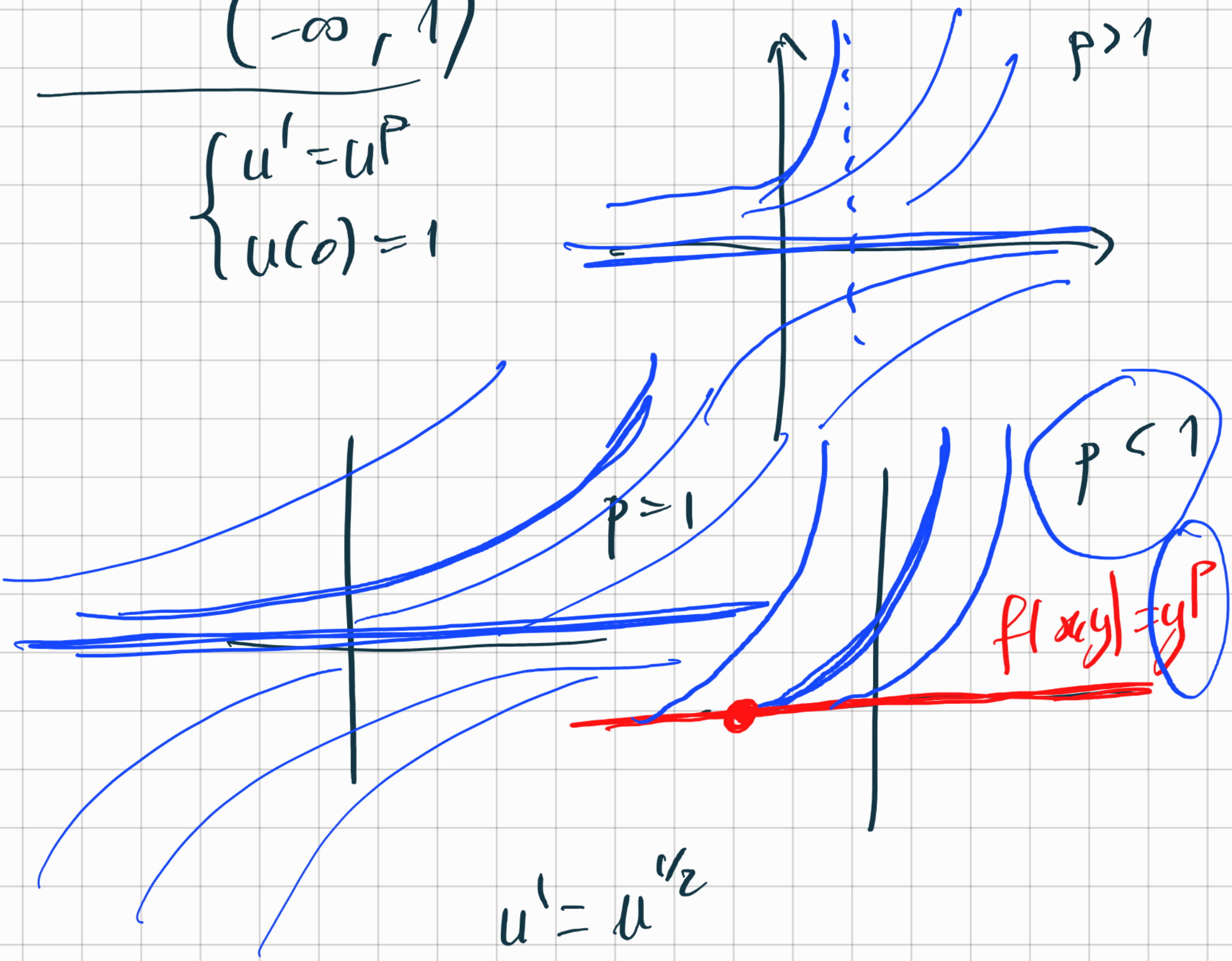
$$u(x) = \frac{1}{c-x} = \frac{1}{1-x}$$

$$u(0) = \frac{1}{c-0} \overset{!}{=} 1 \qquad c = 1$$

Intervallo massimale di esistenza:

$$(-\infty, 1)$$

$$\begin{cases} u' = u^p \\ u(0) = 1 \end{cases}$$



$$u' = u^{1/2}$$

$$\frac{u'}{u^{1/2}} = 1$$

$$\int u^{-\frac{1}{2}} du = x - c$$

$$\sqrt{u} = \frac{1}{2}(x - c)$$

$$u = \frac{1}{4}(x - c)^2$$

Teorema (esistenza globale)

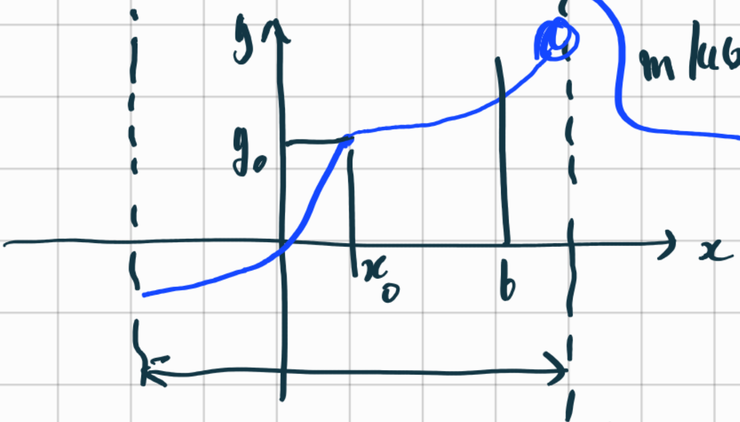
Sia f come nel teorema di $\exists!$ locale.

$$u'(x)=f(x,u(x))$$
$$|u'(x)|=|f(x,u(x))| \le m|u(x)|+q$$

$f: I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Hyp: $\exists\, m,q$ tc.

$$\boxed{|f(x,y)| \le m|y|+q}$$



Tesi Se u è una sol. inestendibile di $\begin{cases} u'(x)=f(x,u(x)) \\ u(x_0)=y_0 \end{cases}$

allora u è definita su tutto I.

Lemma (Gronwall) Sia $u:[a,b)\to\mathbb{R}$

tc: $\boxed{|u'(x)| \le m\cdot|u(x)|+q}$ $\quad\forall x\in[a,b)$

Allora $u(x)$ è limitata. $\quad x>a$

dim

$$\left[\ln\left(1+|u(t)|^2\right)\right]_a^x = \int_a^x \frac{2u(t)u'(t)}{1+|u(t)|^2}\,dt$$

$$\le 2\int_a^x \frac{|u(t)|\cdot|u'(t)|}{1+|u(t)|^2}\,dt \le 2\int_a^x \frac{|u(t)|\cdot(m|u(t)|+q)}{1+|u(t)|^2}\,dt$$

$$\le 2m\int_a^x \underbrace{\frac{|u(t)|^2}{1+|u(t)|^2}}_{\le 1}\,dt + 2q\int_a^x \frac{|u(t)|}{1+|u(t)|^2}\,dt$$

$$\le 2m(x-a) + q\cdot(x-a)$$

$$\le (2m+q)(b-a)$$

$$\frac{1\cdot A}{1+A^2} \le \frac{1}{2}$$

$$\frac{a\cdot b}{a^2+b^2} \le \frac{1}{2}$$

$$0 \le (a-b)^2 = a^2+b^2-2ab$$

$$2ab \le a^2+b^2 \qquad \square$$

Tutto questo vale per i sistemi del I ordine:

$\underline{u}(x) \in \mathbb{R}^n$ $\qquad \underline{u}(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ \vdots \\ u_n(x) \end{pmatrix}$ $\qquad \underline{u}'(x) = \begin{pmatrix} u_1'(x) \\ \vdots \\ u_n'(x) \end{pmatrix}$

$$\left\{ \underline{u}'(x) = \underline{f}(x, \underline{u}(x)) \right.$$

$$\underline{f}(x, \underline{y}) \in \mathbb{R}^n$$

$$f : \Omega \subseteq \underset{\substack{\Downarrow \\ x}}{\mathbb{R}} \times \underset{\substack{\Downarrow \\ \underline{y}}}{\mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}^n$$

$$\begin{cases} u_1'(x) = f_1(x, u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)) \\ u_2'(x) = f_2(\dots) \\ \vdots \\ u_n'(x) = f_n(\dots). \end{cases}$$

Equazioni di ordine n $\qquad u : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\boxed{u^{(n)}(x) = f(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(n-1)}(x))}$$

EQ di ordine n

$$f : \Omega \subseteq \underset{\substack{\Downarrow \\ x}}{\mathbb{R}} \times \underset{\substack{\Downarrow \\ \underline{y}}}{\mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}$$

$$\underline{v}(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ u'(x) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \leftarrow \text{Jet}$$

$$\boxed{\left\{ \underline{v}'(x) = \begin{pmatrix} u'(x) \\ u''(x) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(x) \\ u^{(n)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2(x) \\ v_3(x) \\ \vdots \\ v_n(x) \\ f(x, v_1(x), v_2(x), \dots v_n(x)) \end{pmatrix} \right.}$$

sistema di n equazioni del I ordine

Es

$F = ma$

x = tempo

$u(x)$ = posizione

$$F(x, u(x), u'(x)) = m \cdot u''(x)$$

$$\underline{v}(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ u'(x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} v_2'(x) = \dfrac{F(x, v_1(x), v_2(x))}{m} \\ v_1'(x) = v_2(x) \end{cases}$$

Problema di Cauchy

$$\begin{cases} \underline{v}'(x) = f(x, \underline{v}(x)) \\ \boxed{\underline{v}(x_0) = \underline{\alpha} \in \mathbb{R}^n} \end{cases}$$

Se $\underline{v}(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ u'(x) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$

$\underline{v}(x_0) = \underline{\alpha}$ diventa $\begin{cases} u(x_0) = \alpha_0 \\ u'(x_0) = \alpha_1 \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1} \end{cases}$

Se ho una equazione lineare di ordine n $f(x,\underline{y})$ è lineare rispetto a $\underline{y}$.

$$u^{(n)}(x) + \underbrace{a_{n-1}(x) \cdot u^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x) \cdot u'(x) + a_0(x) \cdot u(x)} = b(x)$$

$\underline{v}(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ u'(x) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$ $\begin{cases} v_1'(x) = v_2(x) \\ v_2'(x) = v_3(x) \\ \vdots \\ v_{n-1}'(x) = v_n(x) \\ v_n'(x) = u^{(n)}(x) = b(x) - \boxed{\begin{pmatrix} a_0(x) \\ \vdots \\ a_{n-1}(x) \end{pmatrix} \cdot \underline{v}(x)} \end{cases}$

$$\underline{v}'(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ 0 & & & 0 & 1 \\ -a_0(x) & -a_1(x) & \dots & & -a_{n-1}(x) \end{bmatrix} \cdot \underline{v}(x) + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{bmatrix}$$

$$\underline{v}'(x) = \underbrace{A(x) \cdot \underline{v}(x) + B(x)}$$

$$f(x, \underline{y}) = A(x) \cdot \underline{y} + B(x)$$

$$|f(x,y)| \leq m\,|y| + q$$

$$m = \sup_x \|A(x)\| \qquad q = \sup_x |B(x)|$$

$\|M\|$ è definito in modo che

$$|M \cdot y| \leq \|M\| \cdot |y|$$

$$\|M\| = \underset{|y|\leq 1}{\overset{\max}{\cancel{\sup}}} |My| < \infty$$

Per il teorema di esistenza globale se i coefficienti $a_0(x), a_1(x), \dots, a_{n-1}(x)$ sono continui e definiti tutti su uno stesso intervallo I allora anche la soluzione $u(x)$ è definita su tutto I.

In particolare le eq. a coefficienti costanti sono definite su tutto $\mathbb{R}$.

Teorema di struttura

Consideriamo una eq. lineare di ordine n

$$L[u] = u^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x)\cdot u^{(k)}(x) = b(x) \;.$$

Se $b(x)=0$ (eq. omogenea): $L[u]=0$
l'insieme delle soluzioni V è uno spazio vettoriale

$$V = \operatorname{Ker} L \qquad \text{con } \dim V = n.$$

In ogni caso (eq. non omogenea).

L'insieme V delle sol. è uno spazio affine:

$$V = \underbrace{\operatorname{Ker} L}_{} + u_* \qquad \text{con } \dim V = n$$

---

dim: Ci rimane solo da dire che

$$\dim \operatorname{Ker} L = n$$

$a_0(x), a_1(x), \dots, a_{n-1}(x)$ siano definiti su un intervallo I.

Fissiamo $x_0 \in I$ $\qquad V = \operatorname{Ker} L$

$$J : V \to \mathbb{R}^n$$
$$u \mapsto \begin{pmatrix} u(x_0) \\ u'(x_0) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}$$

J è lineare

J è un isomorfismo?

J è iniettivo? $J(u) = J(v) \Rightarrow u = v$ $\boxed{\ker J = \{0\}}$

unicità della sol.

J è suriettivo? Dato $y_0 \in \mathbb{R}^n$ $\exists u : J(u) = y_0$

esistenza della sol.

$\square$

$\boxed{\operatorname{Im} J = \mathbb{R}^n}$