ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 13 - 30.3.2022

Eq. diff. lineari a coefficienti costanti

$$u^{(n)} + a_{n-1} u^{(n-1)} + \dots + a_1 u' + a_0 u = g(x)$$

$a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$

Eq. omogenea $g(x) = 0$

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

$$= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots \dots (\lambda - \lambda_n)$$

Una base di sol: $x^k e^{\lambda x}$

$\lambda = \lambda_1, \dots, \lambda_n$

$k <$ molteplicità di λ come radice di $P(\lambda)$

$P(\lambda)$ può avere radici complesse coniugat.

Se $P(\lambda) = 0 \Rightarrow \overline{P(\lambda)} = 0$

$\overline{P(\lambda)} = P(\bar{\lambda}) \Rightarrow \bar{\lambda}$ è radice

<u>Esempio</u> $u'' + 2u' + 2u = 0$

$P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 2 \qquad \Delta < 0$

$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm i$

Una base di soluzioni complesse è data da: $u_1 = e^{(1+i)x}$ $u_2 = e^{(1-i)x}$

Tutte le sol. complesse sono della forma

(*) $u(x) = c_1 e^x \cdot e^{ix} + c_2 e^x \cdot e^{-ix}$

$c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

$= e^x \left(c_1 \left(\cos x + i \operatorname{sen} x \right) + c_2 \left(\cos x - i \operatorname{sen} x \right) \right)$

$= (c_1 + c_2) e^x \cos x + i (c_1 - c_2) e^x \sin x$

lemma Se f e g sono funzioni reali indipendenti e $h = c_1 f + c_2 g$ (con $c_1 \in \mathbb{C}$, $c_2 \in \mathbb{C}$) è una funzione reale allora $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

dim Se $h(x) \in \mathbb{R}$ $\forall x$

$\overline{h(x)} = h(x) = c_1 f(x) + c_2 g(x)$

$= \bar{c}_1 f(x) + \bar{c}_2 g(x)$

$$(c_1-\overline{c_1})f+(c_2-\overline{c_2})g=0$$

f, g indipendenti $\Rightarrow$ $c_1=\overline{c_1}$, $c_2=\overline{c_2}$

$\Rightarrow c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ $\square$

$$\boxed{\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{e^{ix}, e^{-ix}\}} = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{\cos x, \sin x\}$$

$\Downarrow$

$\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{e^x e^{ix}, e^x e^{-ix}\} = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{e^x\cos x, e^x\sin x\}$

Le soluzioni reali sono combinazioni lineari in $\mathbb{R}$

di $v_1 = e^x\cos x$ $v_2 = e^x \sin x$

Tutte le sol. reali si scrivono nella

forma: $u(x) = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

In generale se $\lambda = \alpha \pm i\beta$

ho soluzioni del tipo

$$x^k e^{\alpha x}\cos(\beta x), \; x^k e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

$k =$ molteplicità di λ come radice di P

Esempio

$$u'' + \frac{k}{m} u = 0$$

oscillatore armonico
x tempo
$u(x)$ posizione
$-ku = m \cdot u''$
$mu'' + ku = 0$

$$u'' + \frac{k}{m} u = 0$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \frac{k}{m} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot i \qquad \alpha = 0 \qquad \beta = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$u(x) = c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x \;\; \| \;\; \overset{?}{=} \; c \cdot \sin(\beta x + \varphi)$$

$$c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \cos \beta x + \frac{c_2}{\sqrt{}} \sin \beta x \right)$$

$$\left[\sin(\beta x + \varphi) = \sin \beta x \cdot \underline{\cos \varphi} + \cos \beta x \cdot \sin \varphi \right]$$

$$= \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \, \sin(\beta x + \varphi) \quad \text{con} \quad \begin{cases} \cos \varphi = \dfrac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \\ \sin \varphi = \dfrac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \end{cases}$$

Esercizio

$$u'''' + 2u'' + u = 0$$

$$P(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1$$

$$= (\lambda^2 + 1)^2 = (\lambda + i)^2 (\lambda - i)^2$$

$$\lambda_1 = i \qquad \lambda_2 = -i$$

$$m_1 = 2 \qquad m_2 = 2$$

Le soluzioni sono:

$$u(x) = c_1 \cos x + c_2 x \cos x + c_3 \sin x + c_4 x \sin x$$
$$= (c_1 + c_2 x)\cos x + (c_3 + c_4 x)\sin x$$

<u>Esercizio</u> $\quad u'' + u' + u = 0$

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$
$$\alpha = -\frac{1}{2} \quad \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$u(x) = c_1 e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x\right) + c_2 e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x\right)$$
$$= C \cdot e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x + \varphi\right)$$

<u>Esercizio</u> $\quad u'''' = u$

<u>Esercizio</u> $\quad u''' = u$

<u>Esercizio</u> $\quad u'''' + u = 0 \qquad \lambda^4 = -1$

Eq. non omogenee

(*) $\quad L[u] = g \qquad g = g(x)$

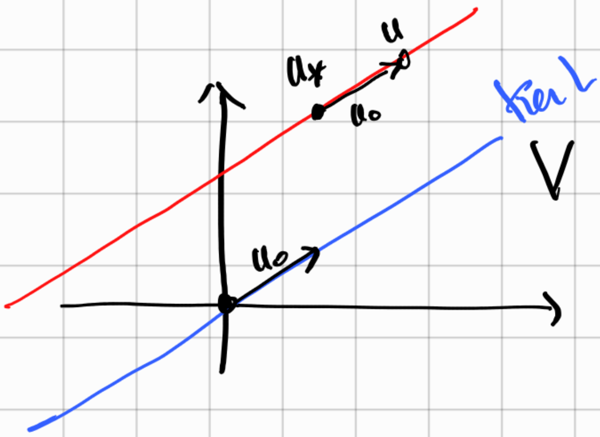
[Es. $\quad L[u] = u'' + u$]

Se u_* è una sol. di $L[u]=g$
[cioè $L[u_*]=g$.]

Allora tutte le sol. di ⊛ sono del tipo

$$u \in u_* + \ker L$$

$u = u_* + u_0$ dove u_* fissata
e u_0 una generica sol. di $L[u]=0$.



$$L(u_*+u_0) = L[u_*]+L(u_0)$$
$$= g + 0 = g$$

Se $L[u]=g$ $= L[u_*+u-u_*]$
$$= L(u_*) + L[u-u_*]$$
$$= g + L[u-u_*]$$
$$\Rightarrow u-u_* \in \ker L.$$

PRINCIPIO di SOVRAPPOSIZIONE

$L[u_1]=g_1$ e $L[u_2]=g_2$

$$L[u_1+u_2]=g_1+g_2$$

Problema: trovare una sol. particolare della eq. non omogenea.

2 Metodi

1. Metodo di similarità. $u^{(n)} + a_{n-1} u^{(n-1)} + \dots + a_1 u' + a_0 u = g(x)$

Se $g(x) = q(x) \cdot e^{\mu x}$ cerco una soluzione della forma $u(x) = p(x) e^{\mu x}$.

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$
$$= (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$$
$$m_1 + \dots + m_k = n.$$

$$L[u] = P(D)[u] = q(x) e^{\mu x}$$
$$L[u] = (D - \lambda_1)^{m_1} \cdots (D - \lambda_k)^{m_k}$$

$$(D - \lambda)\, q(x) e^{\mu x} = \left(q(x) \cdot e^{\mu x}\right)' - \lambda q(x) e^{\mu x}$$
$$= q'(x) e^{\mu x} + q(x) \cdot \mu e^{\mu x} - \lambda q(x) e^{\mu x}$$
$$= [q'(x) + (\mu - \lambda) q(x)] e^{\mu x}$$

$$\begin{cases} \text{Se } \mu = \lambda & = q'(x) e^{\mu x} \qquad \deg q' < \deg q. \\ \text{Se } \mu \neq \lambda & = q_1(x) e^{\mu x} \qquad \deg q_1 = \deg q. \end{cases}$$

Esempio $\quad u'' + u = xe^x \quad \mu = 1 \qquad \lambda^2 + 1 = 0 \quad \lambda_{12} = \pm i$

① Risolvo $\quad u'' + u = 0 \qquad u_0(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

② Cerco una sol. particolare u_p della non omogenea nella forma:

$$u_p = (ax+b)e^x$$
$$u_p' = (a + ax + b)e^x$$
$$u_p'' = (a + a + b + ax)e^x$$

$$u_p'' + u_p = (2ax + 2a + 2b)e^x \overset{!}{=} xe^x$$

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2a + 2b = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$u_p(x) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)e^x$$

Tutte le sol. dell'equazione non omogenea sono:

$$u(x) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)e^x + c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

Esempio 2 $\qquad u'' + u = \cos(2x) \qquad \mu = \pm 2i$

[Penso: $\quad \cos(2x) = \dfrac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2}$

$$u_p = a \cdot \cos(2x) + b \sin(2x)$$

$$\rightarrow u_p' = -2a \sin(2x) + 2b \cos(2x)$$

$$u_4'' = -4a\cos(2x) - 4b\sin(2x)$$

$$u_4'' + u_4 = (a-4a)\cos(2x) + (b-4b)\sin(2x) \overset{!}{=} \cos(2x)$$

$$\begin{cases} -3a = 1 \\ -3b = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = 0 \end{cases}$$

$$u_4(x) = -\frac{1}{3}\cos(2x)$$

$$u(x) = -\frac{1}{3}\cos(2x) + c_1\cos x + c_2\sin x$$