ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 61 – 2.3.2022

Teo. Fondamentale. Sia $f: I \to \mathbb{R}$ continua, I intervallo. Fissato $x_0 \in I$ è definita $F: I \to \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

(Se $x \geq x_0$ $[x_0, x] \subseteq I$, f è continua e quindi integrabile su $[x_0, x]$

Se $x < x_0$ $[x, x_0] \subseteq I$ . . . . $\int_{x_0}^{x} f := -\int_{x}^{x_0} f$)

Inoltre $F'(x)$ esiste per ogni $x \in I$ e vale: $F'(x) = f(x)$.

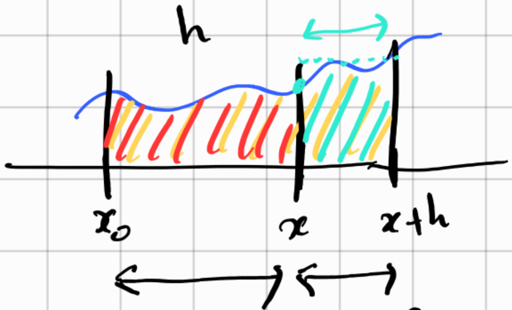
dim $x \in I$ fissato:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \overset{\text{def } F}{=} \frac{\int_{x_0}^{x+h} f - \int_{x_0}^{x} f}{h} \overset{\text{additività}}{=} \frac{\int_{x}^{x+h} f}{h} \left(= \fint_{x}^{x+h} f \right)$$

$$\left[\frac{\int_{x+h}^{x} f}{-h} \right]$$

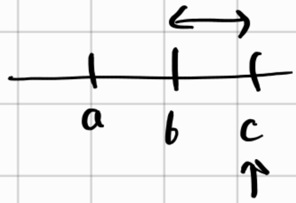
se $h > 0$: $y \in [x, x+h]$; se $h < 0$: $y \in [x+h, x]$ $\overset{\text{teo. media}}{=} f(y)$, $y = y(h)$

per $h \to 0$, $y \to x$: $f(y) \to f(x)$ □



[$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$ vale sempre indipendentemente dall'ordine di a, b, c.

Dimostrato se $a \leq b \leq c$



Per convenzione

$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

$\int_b^c f = \int_a^c f + \int_b^a f$]

Formula fondamentale:

Se $[a,b] \subseteq I$, $G:[a,b] \to \mathbb{R}$, $G'(x) = f(x)$

Allora $\displaystyle\int_a^b f = G(b) - G(a) =: [G]_a^b$

$$\left[\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) =: [G(x)]_a^b \right]$$

dim su $[a,b]$ si ha $G'(x) = f(x) = F'(x)$ (definita prima con $x_0 \in [a,b]$) $x_0 = a$

$$\left(G(x) - F(x)\right)' = G'(x) - F'(x) = 0$$

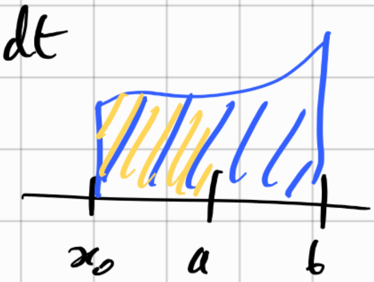
$$\Rightarrow G(x) - F(x) = c \quad \forall x \in [a,b]$$

$$G(x) = F(x) + c$$

$$G(b) - G(a) = (F(b) + \cancel{c}) - (F(a) + \cancel{c})$$

$$= \int_{x_0}^b f(t)\,dt - \int_{x_0}^a f(t)\,dt$$

$$= \int_a^b f(t)\,dt \quad \square$$

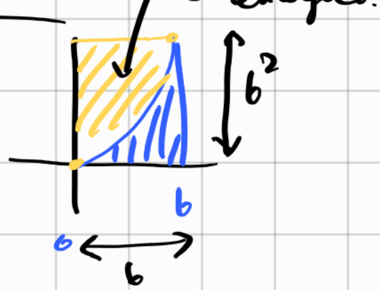


Esempio $\displaystyle\int_0^b x^2\,dx = G(b) - G(0) = \frac{b^3}{3} - 0 = \frac{b^3}{3}$

se trovo G t.c. $G'(x) = x^2$

$$\frac{1}{3}(x^3)' = \frac{3x^2}{3} = x^2$$

$$G(x) = \frac{x^3}{3}$$



Def Se $F' = f$ diremo che F è una primitiva di f.

$[f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ F: A \to \mathbb{R},\ F$ derivabile, $F'(x) = f(x)\ \forall x \in A]$

$$F \xmapsto{D} f \qquad DF = f$$

$$\mathcal{D}^1(A) \xrightarrow{D} \mathbb{R}^A \leftarrow \text{tutte le funzioni } A \to \mathbb{R}.$$

↑ funzioni derivabili

Oss 1 Se $f : I \to \mathbb{R}$ è continua, I intervallo. Allora esiste almeno una primitiva (F, la funzione integrale).

Oss 2 Se F è una primitiva di f. Allora $F+c$ è un'altra primitiva ($c \in \mathbb{R}$)

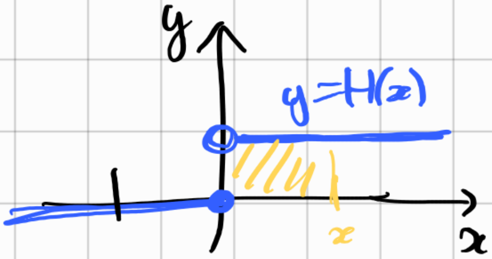
$$(F+c)' = F' = f$$

Oss 3 Se F e G sono 2 primitive di f su un intervallo I allora $\exists\, c \in \mathbb{R}$

$$G = F + c$$

Esempio 1

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$



$\exists ?\ F$ t.c. $F'(x) = H(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Se $F'(x) = H(x)$ per $x < 0$ $\quad F'(x) = 0$

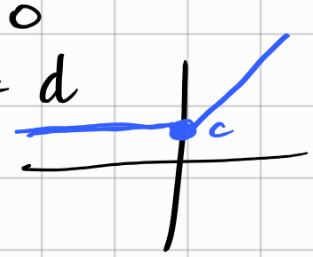
$\exists c : \quad F(x) = c$ per $x < 0$

per $x > 0$ $\quad F'(x) = 1 = (x)'$

$$(F(x) - x)' = 0$$

$$F(x) - x = d$$

$$F(x) = \begin{cases} c & \text{per } x < 0 \\ ? & \\ x + d & \text{per } x > 0 \end{cases}$$



$F(0) = c = 0 + d$ affinché F sia continua.

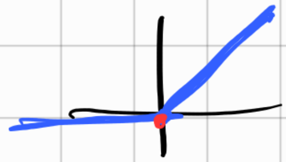
$$F(x) = \begin{cases} c & \text{per } x \le 0 \\ x + c & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

F non è derivabile in $x = 0$.

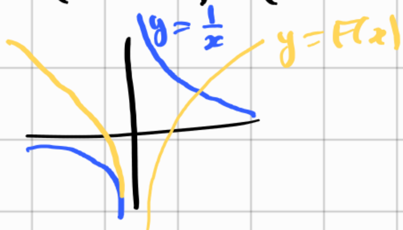
In effetti scelto:

$$F(x) = \int_0^x H(t)\,dt = \begin{cases} x & \text{se } x \ge 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$F'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ \nexists & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



Esempio 2 $\quad f(x) = \frac{1}{x} \qquad f : (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \to \mathbb{R}$



Noto che $F(x) = \ln|x|$

Ogni primitiva G di f differisce da F per una costante separatamente su $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$.

$\exists c_1 \in \mathbb{R}$
$\exists c_2 \in \mathbb{R}$

$$G(x) = \begin{cases} \ln|x| + c_1 & \text{se } x > 0 \\ \ln|x| + c_2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

In astratto: $\quad$ spazi vettoriali

$$\boxed{C^1(A) \xrightarrow{D} C^0(A)}$$

costante

$$\operatorname{Ker} D = \{ f \in C^1(A) : f'(x) = 0 \ \forall x \in A \} \supseteq \mathbb{R}$$

$$\operatorname{Im} D = \{ f \in C^0(A) : \ \exists F : F' = f \}$$

$$= C^0(A) \quad (\text{quantomeno se } A \text{ è unione finita di intervalli})$$

↑ teo. fondamentale del calcolo.

$$\dim \operatorname{Ker} D = \#\{\text{componenti connesse di } A\}$$

$$= \#\{\text{ intervalli "disgiunti" di } A \}.$$

$$\begin{tikzcd}
C^1(A) \arrow[r, "D"] \arrow[d, "\pi"] & C^0(A) \\
C^1(A)/\operatorname{Ker} D \arrow[ur, "\tilde{D}"'] &
\end{tikzcd}$$

__Notazione__ per le primitive: integrale indefinito

$$\int f =: \int f(x)\,dx =: \{F : F \text{ primitiva di } f\}$$

$$= \{F : F' = f\}$$

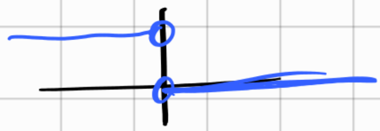
$$= D^{-1}(\{f\})$$

__Esempio__ $\int x^2\,dx = \left\{\frac{x^3}{3} + c\right\} = \frac{x^3}{3} + c$

Esempio $\int \frac{1}{x}\,dx \overset{\text{NO}}{=} \ln|x| + c$

↑ non sono tutte le primitive

$$F(x) = \begin{cases} \ln x & \text{per } x>0 \\ 1+\ln x & \text{per } x<0 \end{cases}$$



Allora noi scriveremo più semplice $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$

perché intendo $\int \frac{1}{x}\,dx \ni \ln|x|$

La notazione è giustificata dal fatto che:

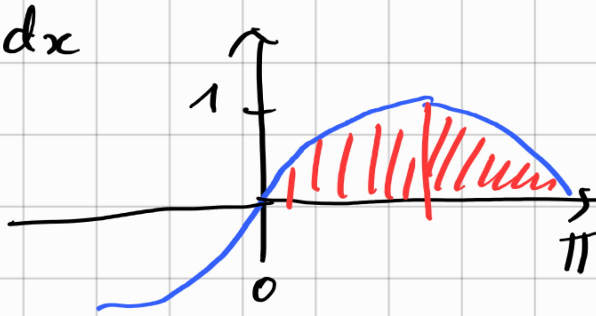
Formula fondamentale.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[\int f(x)\,dx\right]_a^b$$

↑ integrale definito (Riemann)

↑ integrale "indefinito" cioè l'insieme delle primitive

Esempio Calcolare $\int_0^{\pi} \sin x \, dx$



$(\cos x)' = -\sin x$

$(-\cos x)' = \sin x$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x \; (+c)$$

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = \left[-\cos x\right]_0^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0)$$

$$= 1 + 1 = 2 \quad \square$$