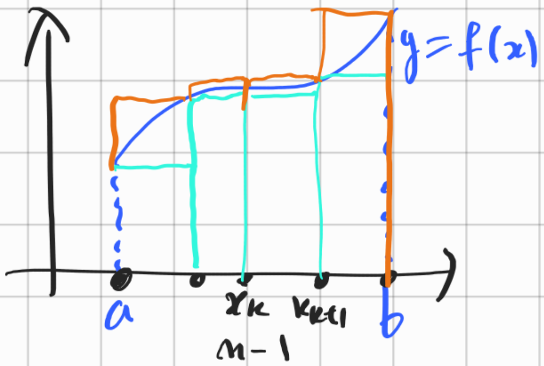
# ANALISI MATEMATICA B
# LEZIONE 59 - 23.2.2022

L'integrale di Riemann. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$

$f$ limitata. $\int_a^b f$ $\int_a^b f(x)\,dx$




$$P=\{x_0=a<x_1<x_2\dots<x_n=b\}$$

$$S^*_{*}(f,P)=\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)\sup_{\inf} f([x_k,x_{k+1}])$$

$$I^*(f)=\inf_P S^*(f,P)=\inf\{S^*(f,P):P\subseteq[a,b],\ P\supseteq\{a,b\},\ \#P\in\mathbb{N}\}$$

$$I_*(f)=\sup_P S_*(f,P)=\sup\{S_*(f,P):P\dots\}$$

Se $I^*(f)=I_*(f)$ questo è $\int_a^b f$.

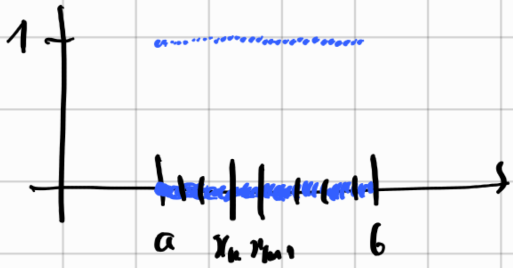
- $f$ è integrabile $\iff$ $\forall\varepsilon>0\ \exists P$ suddivisione t.c.

$$S^*(f,P)-S_*(f,P)<\varepsilon.$$

- $\exists P_n$ : $S^*(f,P_n)\to\ell$, $S_*(f,P_n)\to\ell$ $\qquad\int_a^b f=\ell.$

Esempio $\quad f:[a,b] \to \mathbb{R}$ $\quad$ funzione di Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$




$I = [x_k, x_{k+1}]$ $\qquad x_k < x_{k+1}$

$\sup f([x_k, x_{k+1}]) = 1$
$\inf f([x_k, x_{k+1}]) = 0$

$$S^*(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \cdot 1$$

$$S^*(f,P) = b-a$$

$$S_*(f,P) = 0$$

$f$ non è R-integrabile

## PROPRIETÀ dell'INTEGRALE

Teo (additività)

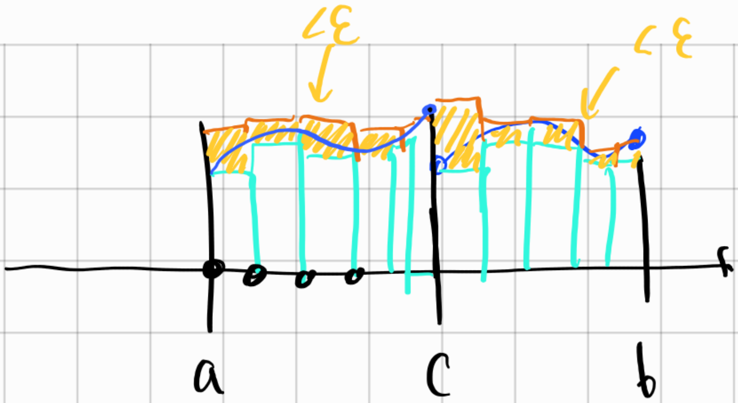
Se $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ è R-integrabile e se $c \in [a,b]$

allora $f$ è R-integrabile su $[a,c]$ e su $[c,b]$

e vale: $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$ $\qquad (*)$

Viceversa se $f$ è R-int. su $[a,c]$ e su $[c,b]$ allora $f$ è R-int. su $[a,b]$ e vale $(*)$.

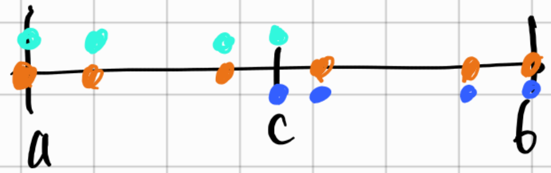
dim




Se $P \subseteq [a,b]$ è una suddivisione

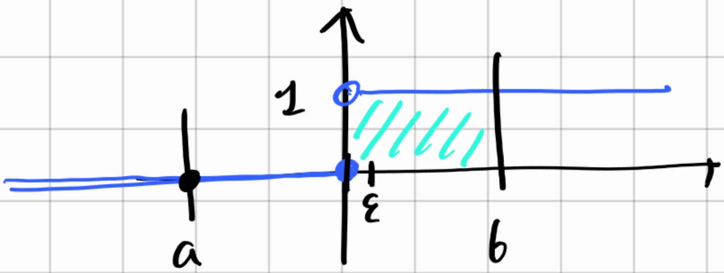
$Q = (P \cap [a,c]) \cup \{c\}$ è una suddivisione di $[a,c]$

$R = (P \cap [c,b]) \cup \{c\}$ " " " $[c,b]$ $\square$




$\square$

Esempio $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$ Heavyside




$f$ è integrabile su $[a,b]$ $\forall\, a \leq 0, b \geq 0$

e $\int_a^b f(x)\,dx = b$

dim $P_\varepsilon = \{a, 0, \varepsilon, b\}$ $[a,0], [0,\varepsilon], [\varepsilon, b]$

$S^*(f, P_\varepsilon) = 0 + \varepsilon \cdot 1 + (b-\varepsilon)\cdot 1 = b$

$S_*(f, P_\varepsilon) = 0 + \varepsilon \cdot 0 + (b-\varepsilon)\cdot 1 = b - \varepsilon$

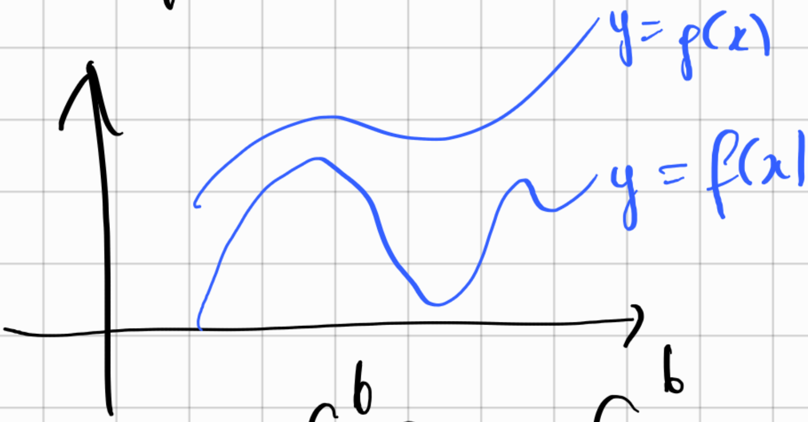
$S^*_*(f, P_\varepsilon) \longrightarrow b$ per $\varepsilon \to 0$

$\triangleright$

**Teo** (monotonia) Se $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$

R-integrabili. Se $f \le g$ $\left(\forall x\in[a,b] \;\; f(x)\le g(x)\right)$

$a \le b$.




$$\int_a^b f \le \int_a^b g.$$

**dim** $f \le g$ $\quad \overset{\inf}{\underset{A}{\sup}} f \le \overset{\inf}{\underset{A}{\sup}} g$

$$S^*_*(f,P) \le S^*_*(g,P)$$

$$I^*_*(f) \le I^*_*(g) \qquad \square$$

**Corollario** Se $f(x) \ge 0$

$a \le b$ $\quad \int_a^b f \ge 0.$ $\qquad \square$

**Teo** (linearità) Se $f,g$ sono R-integrabili su $[a,b]$

allora se $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ $(\lambda f+\mu g)$ è R-integrabile su $[a,b]$ e vale:

$(\lambda\cdot f)(x)=\lambda\cdot f(x)$

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

$$\int_a^b \lambda f + \mu g = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$

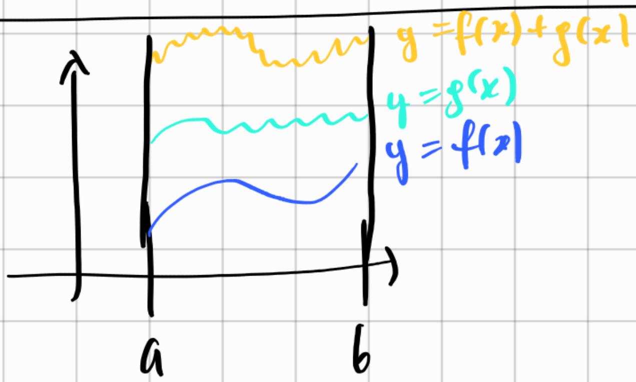
Ovvero posto $V = \mathcal{R}([a,b]) = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} : f\ \mathcal{R}\text{-int.},\ f \text{ limitata} \}$

$V$ è uno spazio vettoriale (reale)

$$\int_a^b : V \to \mathbb{R} \qquad \text{è lineare.}$$
$$f \longmapsto \int_a^b f$$

---

dim





I passo Se $\lambda \geq 0$ allora $\lambda f$ è $\mathcal{R}$ int. e

$$\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f.$$

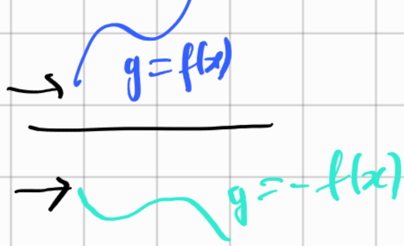
$$\sup_A \lambda f = \lambda \sup_A f \qquad \inf_A \lambda f = \lambda \inf_A f$$

$$S^*_*(\lambda f, P) = \lambda S^*_*(f, P)$$

$$I^*_*(\lambda f) = \lambda I^*_*(f) \quad \square$$

II passo: Se $\lambda \leq 0$ (basta $\lambda = -1$)

$$\sup_A (-f) = -\inf_A f$$




$$S^*_*(-f, P) = -S_*^*(f, P)$$

$$I^*_*(-f) = -I_*^*(f) \qquad \square$$

$\overline{\underline{\text{III}}}$ passo: $f+g$ è $\mathcal{R}$ int. e $\int f+g = \int f + \int g$

$$\Downarrow$$

$$\sup_A (f+g) \le \sup_A f + \sup_A g \quad \Leftarrow$$

$$\underbrace{\underset{\vee\!/}{f(x)} + \underset{\vee\!/}{g(x)}}_{f(x)+g(x)} \quad \forall x$$

$$\inf_A (f+g) \ge \inf_A f + \inf_A g$$

$$S_*(f,P) + S_*(g,P) \le S_*(f+g,P) \le S^*(f+g,P) \le S^*(f,P) + S^*(g,P)$$

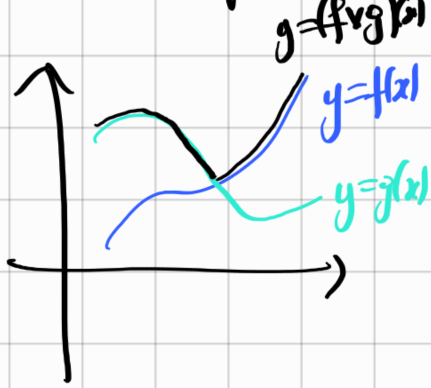
$$\le \qquad \le$$

$$I_*(f) + I_*(g) \le I_*(f+g) \le I^*(f+g) \le I^*(f) + I^*(g)$$

$$= \qquad =$$

$\square$

Teorema (proprietà di reticolo) Se $f$ e $g$ sono R-integrabili in $[a,b]$ allora anche:




$$(f\vee g)(x) = \max\{f(x),g(x)\}$$

$$(f\wedge g)(x) = \min\{f(x),g(x)\}$$

$$|f| = f\vee(-f)$$

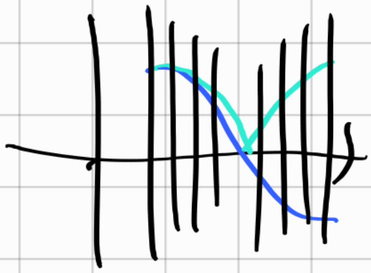
$$f^+(x) = \left\{\begin{array}{ll} f(x) & \text{se } f(x)\geq 0 \\ 0 & \text{se } f(x)<0 \end{array}\right\} = f\vee 0$$

$$f^-(x) = \left\{\begin{array}{ll} -f(x) & \text{se } f(x)\leq 0 \\ 0 & \text{se } f(x)\geq 0 \end{array}\right\} = -(f\wedge 0)$$

sono R-integrabili su $[a,b]$.

Inoltre

$$\boxed{\int |f| \geq \left|\int f\right|}$$



dim Basta fare $|f|$.

$$\sup_A |f| - \inf_A |f| \leq \sup_A f - \inf_A f$$

$$\longrightarrow |f(x)| - |f(y)| \leq |f(x) - f(y)|$$

$$|a| - |b| \leq |a-b|$$

$\hookrightarrow \quad S^*(|f|,P) - S_*(|f|,P) \leq S^*(f,P) - S_*(f,P)$

Notiamo che:

$$\begin{cases} a = a^+ - a_- \\ |a| = a^+ + a_- \end{cases} \qquad \begin{cases} a^+ = \dfrac{a+|a|}{2} \\ a^- = \dfrac{|a|-a}{2} \end{cases}$$

$$f^+ = \frac{f+|f|}{2} \qquad f^- = \frac{|f|-f}{2}$$

$$\begin{cases} (f \vee g) + (f \wedge g) = f + g \\ (f \vee g) - (f \wedge g) = |f-g| \end{cases}$$

$$\begin{cases} f \vee g = \dfrac{f+g+|f-g|}{2} \\ f \wedge g = \dfrac{f+g-|f-g|}{2} \end{cases}$$

$\boxed{|a+b| \leq |a|+|b|}$

$$\int |f| = \int (f^+ + f^-) = \int f^+ + \int f^- =$$

$$= \left|\int f^+\right| + \left|\int f^-\right| \geq \left| \int f^+ - \int f^- \right|$$

$$= \left| \int (f^+ - f^-) \right| = \left| \int f \right|.$$