Soluzioni prova scritta parziale n. 2

Analisi Matematica A e B, 2021/22

19.2.2022

1. Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos x + \ln(e^x - x) - \frac{1}{2}(\tan x - x)}{\arctan(x^2)\cdot\arcsin(x^2)\cdot\cos(e^x + x)}.$$

Soluzione. Sviluppiamo con Taylor per $x \to 0$ le funzioni coinvolte:

$$\begin{aligned}
\ln\cos x &= \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)\\
&= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2 + o(x^4)\\
&= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4} + o(x^4) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4);\\
\ln(e^x - x) &= \ln\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)\\
&= \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2 + o(x^4)\\
&= \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^4) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + o(x^4);\\
-\frac{1}{2}(\operatorname{tg} x - x) &= -\frac{1}{2}\left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^4) - x\right) = -\frac{x^3}{6} + o(x^4);\\
\operatorname{arctg} x^2 &= x^2 + o(x^2);\\
\arcsin x^2 &= x^2 + o(x^2);\\
\cos(e^x + x) &= \cos(1) + o(1).
\end{aligned}$$

Dunque la funzione di cui dobbiamo calcolare il limite è uguale a

$$\begin{aligned}
&\frac{-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6} + o(x^4)}{\cos(1)\cdot x^4 + o(x^4)}\\
&= \frac{-\frac{x^4}{6} + o(x^4)}{\cos(1)\cdot x^4 + o(x^4)} \to -\frac{1}{6\cos 1}.
\end{aligned}$$

□

2. Si consideri la serie al variare di $\alpha > 0$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\sqrt{\frac{1}{n} + 2n\cos\frac{1}{n}} - \sqrt{2n}\right)^\alpha.$$

(a) Mostrare che $\sqrt{x + \frac{2}{x}\cos x} - \sqrt{\frac{2}{x}} > 0$ per ogni $x \in (0,1]$ (cosicché la serie è ben definita).

(b) Per quali α la serie converge assolutamente?

(c) Facoltativo: per quali α la serie converge (semplicemente)?

Soluzione. Poniamo

$$f(x) = \sqrt{x + \frac{2\cos x}{x}} - \sqrt{\frac{2}{x}} = \sqrt{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \left[\sqrt{\frac{x^2}{2} + \cos x} - 1 \right].$$

Osserviamo che la funzione è definita in $[0, 1)$ in quanto su tale intervallo sia x che la funzione $\cos x$ sono positive e dunque le radici quadrate sono definite. Osserviamo che $f(x) > 0$ se e solo se

$$\frac{x^2}{2} + \cos x > 1$$

ovvero se e solo se

$$g(x) = \frac{x^2}{2} + \cos x - 1 > 0.$$

Si ha

$$g'(x) = x - \sin x$$

ed è ben noto che $\sin x < x$ per ogni $x > 0$ (altrimenti lo si può verificare derivando ulteriormente). Dunque $g'(x) > 0$ per ogni $x \in [0, 1]$ e g risulta essere strettamente crescente su tale intervallo. Dunque $g(x) > g(0) = 0$ per $x \in (0, 1]$ ed anche $f(x) > 0$ in tale intervallo.

Per il punto (b) osserviamo che si tratta di studiare la convergenza assoluta della serie $\sum a_n$ con

$$a_n = (-1)^n \cdot f^\alpha\left(\frac{1}{n}\right).$$

Per $x \to 0$ si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \left[\sqrt{\frac{x^2}{2} + 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)} - 1 \right] \\ &= \sqrt{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{x^4}{48} + o(x^4) - 1 \right] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{48} \cdot x^{\frac{7}{2}} + o(x^{\frac{7}{2}}) \end{aligned}$$

da cui

$$|a_n| = f^\alpha\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{\sqrt{2^\alpha}}{48^\alpha \cdot n^{\frac{7\alpha}{2}}}$$

e visto che la serie $\sum 1/n^p$ converge se e solo se $p > 1$ e la nostra serie in valore assoluto è asintoticamente equivalente a questa con $p = 7\alpha/2$, dunque la nostra serie è assolutamente convergente se e solo se $7\alpha/2 > 1$ ovvero $\alpha > 2/7$.

Per il punto (c) osserviamo innanzitutto che essendo $|a_n| \sim C/n^{\frac{7\alpha}{2}}$ se $\alpha \leq 0$ non è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza. Se invece $\alpha > 0$ si tratta di una serie a segni alterni con $a_n \to 0$. Per il teorema di Leibniz possiamo ottenere che la serie è convergente se riusciamo a dimostrare che $|a_n|$ è definitivamente decrescente. Visto che $|a_n| = f^\alpha(1/n)$ è sufficiente dimostrare che $f(x)$ è crescente in un intorno destro di $x = 0$.

Possiamo allora studiare la monotonia di f tramite lo studio del segno della derivata. Sappiamo che

$$f(x) = \sqrt{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{x^4}{48} + o(x^4) \right].$$

Il termine tra parentesi quadre è lo sviluppo di una funzione di classe C^∞ in un intorno di zero dunque possiamo affermare che la derivata di tale funzione ammette uno sviluppo di Taylor all'ordine 3. Inoltre il polinomio di Taylor di ordine 3 non è altro che la derivata del polinomio di Taylor di ordine 4. Dunque derivando il prodotto si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{\sqrt{2}}{2} x^{-\frac{3}{2}} \left[\frac{x^4}{48} + o(x^4) \right] + \sqrt{2} x^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{x^3}{12} + o(x^3) \right] \\ &= \frac{7\sqrt{2}}{96} x^{\frac{5}{2}} + o(x^{\frac{5}{2}}) = \frac{7\sqrt{2}}{96} x^{\frac{5}{2}} (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Per la permanenza del segno esiste un intorno di $x = 0$ in cui $1 + o(1) > 0$ dunque in un intorno destro di $x = 0$ si ha $f'(x) > 0$ come volevamo dimostrare. □

3. Data la funzione
$$f(x) = \frac{3 - x}{1 + \ln x}$$
determinare il più grande intervallo $I \subset \mathbb{R}$ contenente il punto $x = 1$ sul quale $f \colon I \to \mathbb{R}$ risulta essere iniettiva. Su tale intervallo, $f \colon I \to \mathbb{R}$ è anche suriettiva? Calcolare, se esiste, $(f^{-1})'(2)$. (Si intende che f^{-1} è l'inversa di f ristretta all'intervallo I).

Soluzione. Si osservi innanzitutto che la funzione è definita solo se $x > 0$ e $x \neq 1/e$. Si intende quindi che $f \colon (0, 1/e) \cup (1/e, +\infty) \to \mathbb{R}$ è definita sull'unione di due intervalli. Facendo i limiti agli estremi di questi intervalli si nota che

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} f(x) &= 0, \\ \lim_{x \to (\frac{1}{e})^\mp} f(x) &= \mp\infty, \\ \lim_{x \to +\infty} f(x) &= -\infty. \end{aligned}$$

Studiamo la derivata:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-1 - \ln x - \frac{3-x}{x}}{(1 + \ln x)^2} \\ &= -\frac{3 + x \ln x}{x(1 + \ln x)^2}. \end{aligned}$$

Posto $g(x) = 3 + x \ln x$ osserviamo che il segno di f' è opposto al segno di g. Studiamo quindi la funzione $g(x)$. Si ha $g'(x) = 1 + \ln x$ da cui $g'(x) \geq 0$ se $x \geq e^{-1}$, $g'(x) \leq 0$ se $x \leq e^{-1}$ dunque $g(e^{-1})$ è il valore minimo di $g(x)$. Ma si ha $g(e^{-1}) = 3 - \frac{1}{e} > 2 - \frac{1}{2} > 0$. Dunque $g(x) > 0$ per ogni x e $f'(x) < 0$ per ogni x nel dominio di f. Per i criteri di monotonia f è strettamente decrescente e quindi iniettiva se ristretta ad ognuno dei due intervalli su cui è definita. L'intervallo che contiene il punto $x = 1$ è dunque $I = (1/e, +\infty)$ e questo è il più grande possibile in quanto la funzione non è definita in $1/e$. Agli estremi di tale intervallo la funzione tende a $+\infty$ e $-\infty$ dunque per il teorema dei valori intermedi la funzione è anche surgettiva. Osserviamo che $f(1) = 2$ e che $f'(1) = -3$ dunque la funzione inversa $f^{-1}(y)$ è derivabile per $y = 2$ e si ha

$$\left(f^{-1}\right)'(2) = \frac{1}{f'(1)} = -\frac{1}{3}.$$

□