ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 54 - 11.2.2022

$$f(x) = \arcsin(x^2) - \sin(x^2) - x\ln\left(1 + \frac{x^5}{3}\right)$$

Dire se $x=0$ è un massimo o minimo locale o flesso?

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}$$

$$(1+y)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}y + \frac{3}{8}y^2 - \frac{5}{16}y^3 + \dots + \binom{-\frac{1}{2}}{n} y^n + o(y^n)$$

$$(1-x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \dots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n} + o(x^{2n})$$

$$\arcsin x = P_7(x) + o(x^7)$$

$$\boxed{P_7'(x)} = \leftarrow$$

$$= x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \dots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(-\frac{(2n-1)}{2}\right)}{n!}$$

$$= (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\dots\cdot(2n-1)}{2^n\, n!}$$

$$= (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

$$\left[\; 2^n \cdot n! \overset{?}{=} (2n)!! = (2n)(2n-2)(2n-4)\cdots 2 \right.$$

$$= 2n\, 2(n-1)\, 2(n-2)\cdots 2\cdot 1$$

$$\left. = 2^n\, n! \;\right]$$

<u>Es</u> $n=3$

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{5!!}{6!!} = \frac{5\cdot\cancel{3}\cdot 1}{\cancel{6}\,2\cdot 4\cdot 2}$$

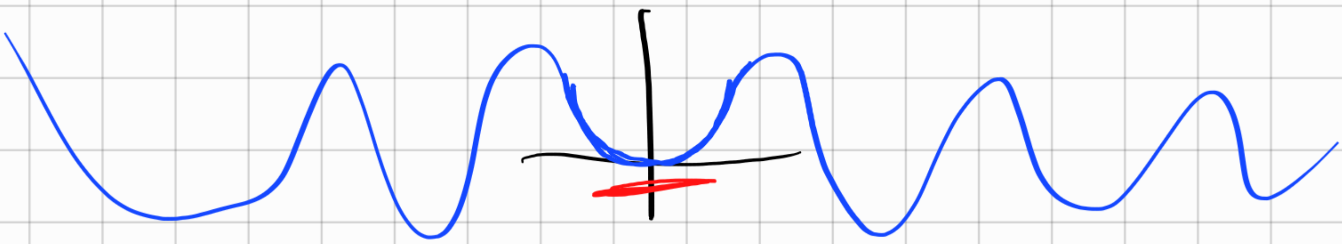
$$= \frac{5}{16}.$$

$$\arcsin(x^2) - \sin(x^2) - x\ln\left(1+\frac{x^5}{3}\right)$$

$$= \cancel{x^2} + \cancel{\frac{x^6}{6}} + \frac{3}{40}x^{10} + o(x^{10}) - \left(\cancel{x^2} - \cancel{\frac{x^6}{6}} + \frac{x^{10}}{120} + o(x^{10})\right)$$

$$- \cancel{\frac{x^6}{3}} + \cancel{\frac{x^{11}}{18}} + o(\cancel{x^{11}}) = \frac{1}{15}x^{10} + o(x^{10})$$

$$\left[\begin{aligned} \ln(1+y) &= y - \frac{y^2}{2} + o(y^2) \\ \ln\left(1+\frac{x^5}{3}\right) &= \frac{x^5}{3} - \frac{x^{10}}{18} + o(x^{10}) \end{aligned}\right]$$



$$f(x) = \boxed{\frac{x^{10}}{15} + o(x^{10})}$$

$$= \frac{x^{10}}{15}\underbrace{\left(1 + o(1)\right)}_{\downarrow\, 1}$$

$\frac{x^{10}}{15}$: $\vee\, 0$ se $x \neq 0$

$1+o(1)$: è >0 in un intorno di $x=0$ (permanenza del segno)

$\exists\, \varepsilon > 0$ t.c. se $|x| < \varepsilon$ e $x \neq 0$ $f(x) > 0$.

Ma $f(0) = 0$ quindi $x=0$ è un minimo locale.

Fosse stato $f(x) = -\frac{x^7}{2} + o(x^7)$

Fosse stato

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^{20} + o(x^{20})$$

Nota $f(x) = \frac{x^{10}}{15} + o(x^{10})$ $\qquad P_{10}(x) = \frac{x^{10}}{15}$

$f(0) = 0,\ f'(0) = 0,\ f''(0) = 0,\ f'''(0) = 0 \ldots$

$\ldots f^{IX}(0) = 0,\ f^{X}(0) = \frac{10!}{15}$

Sia f derivabile tante volte in x_0.

Se $f'(x_0)=0$ diremo che x_0 è un

<u>punto critico</u>

Se $f''(x_0)>0 \Rightarrow x_0$ è un minimo locale

$f''(x_0)<0 \Rightarrow x_0$ è un max locale

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+o\left((x-x_0)^2\right)$$

0

$$\underbrace{f(x)-f(x_0)}=\underbrace{(x-x_0)^2}_{+}\underbrace{\left(\frac{f''(x_0)}{2}+o(1)\right)}_{-}$$

Se $f''(x_0)>0$

$f(x)-f(x_0)\geq 0$ in un intorno di x_0.

Se $f''(x_0)=0$?

Guardo $f'''(x_0)$ ....

Se $f'''(x_0)\neq 0$

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'''(x_0)}{6}(x-x_0)^3+o\left((x-x_0)^3\right)$$

$$f(x)-f(x_0)=\boxed{(x-x_0)^3}\boxed{\left(\frac{f'''(x_0)}{6}+o(1)\right)}$$

$f'''(x_0)>0$   $f'''(x_0)<0$

Convergenza delle serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$

$n\to+\infty$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\boxed{\arcsin\left(\frac{1}{n^2}\right)-\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)-\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{3n^5}\right)}\right]=\sum_{n=1} a_n$$

$$f(x)=\arcsin(x^2)-\sin(x^2)-x\ln\left(1+\frac{x^5}{3}\right)$$

$x=\frac{1}{n}$

$a_n=f\left(\frac{1}{n}\right)$ $\qquad f(x)=\frac{x^{10}}{15}+o(x^{10})$ per $x\to0$

$$a_n=f\left(\frac{1}{n}\right)=\underbrace{\frac{1}{15n^{10}}+o\left(\frac{1}{n^{10}}\right)}\qquad \text{per } n\to+\infty$$

$$\frac{a_n}{\frac{1}{15}\frac{1}{n^{10}}}=\frac{\frac{1}{15}\frac{1}{n^{10}}+o\left(\frac{1}{n^{10}}\right)}{\frac{1}{15}\frac{1}{n^{10}}}$$

$a_n\sim\frac{1}{15}\frac{1}{n^{10}}$ $\qquad =1+o(1)\to1$

$\sum a_n$ ha lo stesso carattere di $\sum\frac{1}{15}\frac{1}{n^{10}}=\frac{1}{15}\sum\frac{1}{n^p}$ $\quad p=10>1$

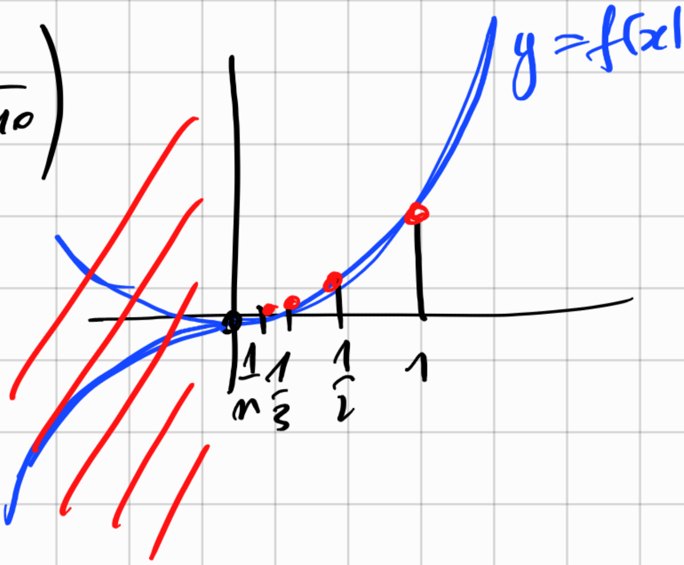
è convergente.

$\boxed{a_n\overset{?}{>}0}$ per n abbastanza grande.

$$a_n = \frac{1}{15}\,\frac{1}{n^{10}} + o\left(\frac{1}{n^{10}}\right)$$

$$a_n = \underbrace{\frac{1}{n^{10}}}_{+}\underbrace{\left[\frac{1}{15} + o(1)\right]}_{+}$$

per n abbastanza grande.



a_n come prima

Piccola complicazione:

per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge $\underbrace{\sum a_n^{\alpha}}$

$$a_n = \frac{1}{15}\,\frac{1}{n^{10}} + o\left(\frac{1}{n^{10}}\right) \qquad \text{per } n \to +\infty$$

$$a_n^{\alpha} = \left(\frac{1}{15}\,\frac{1}{n^{10}} + o\left(\frac{1}{n^{10}}\right)\right)^{\alpha}$$

$$= \left(\frac{1}{15}\,\frac{1}{n^{10}} \cdot \left(1 + o(1)\right)\right)^{\alpha}$$

$$= \frac{1}{15^{\alpha}} \cdot \frac{1}{n^{10\alpha}}\,\underbrace{\left(1 + o(1)\right)}^{\cancel{\alpha}}$$

$$\left(1+o(1)\right)^{\alpha} = 1 + \alpha\, o(1) + o(o(1)) = 1 + o(1)$$

$$a_n^{\alpha} \sim \frac{1}{15^{\alpha}} \cdot \frac{1}{n^{10\alpha}}$$ se $p = 10\alpha > 1$ converge

$$\boxed{\alpha > \frac{1}{10}}$$

Ulteriore complicazione: a_n come prima.

$$\sum (-1)^n a_n^\alpha$$

$$a_n = \frac{1}{15}\cdot\frac{1}{n^{10}} + o\left(\frac{1}{n^{10}}\right)$$

Per quali α converge?

$$\left|(-1)^n a_n^\alpha\right| = a_n^\alpha$$

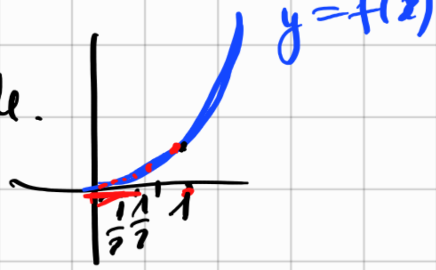
se n abbastanza grande $a_n > 0$.

La serie converge assolutamente se $\alpha > \frac{1}{10}$.

Posso applicare Leibniz se $\alpha \leq \frac{1}{10}$?

(i) $a_n \to 0$ $\qquad a_n \sim \underbrace{\frac{1}{15}\,\frac{1}{n^{10}}} \to 0$

(ii) a_n decrescente. ?? almeno per n grande.



$$a_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$$

Se $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ è crescente allora $a_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$ è decrescente.

Basta mostrare che f è crescente almeno su un piccolo intervallo $(0, \varepsilon)$.

Basta che f' sia positiva in $\boxed{(0, \varepsilon)}$

Ma $\qquad f(x) = \frac{1}{15} x^{10} + o(x^{10})$

Quindi $\qquad f'(x) = \frac{10}{15} x^{9} + o(x^{9})$

Formula di Taylor con Resto di Peano "se" e "solo se".

$$f'(x) = \underset{+}{x^{9}} \left(\frac{10}{15} + o(1) \right)$$

$x>0$

positivo in $(0, \varepsilon)$

per la permanenza del segno.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{\sin x}}{\ln x \cdot \ln(1+x^2)}$$