ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 48 - 28.1.2021

Teorema di Cauchy $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$, continue, derivabili su (a,b), $g'(x)\neq 0$ $\forall x\in(a,b)$. Allora

$$\exists\, \boxed{x_0\in(a,b)} \qquad \boxed{\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}}.$$

dimostrazione sbagliata:

$$\cancel{\frac{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}{\frac{g(b)-g(a)}{b-a}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_1)}}$$

se $g(x)=x$ Cauchy diventa Lagrange.

Hospital f,g derivabili su (a,b), continue su $[a,b]$, $g'(x)\neq 0$

se $f(a)=g(a)=0$

Cauchy su $[a,x]$

allora $$\boxed{\frac{f(x)}{g(x)}} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(y)}{g'(y)} \to \ell$$

$y\in(a,x)$

$y\to a^+$ se $x\to a^+$

$x\to a^+$

Se $\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\ell \in\mathbb{R}$ allora $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell$ □.

Lo stesso vale se $\lim_{x \to a^+} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to a^+} g(x) = 0$

Lo stesso vale se faccio i limiti $x \to a^-$

Cosa succede se $a = +\infty$ o $a = -\infty$?

$f, g : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ $\qquad x \to +\infty$

derivabili, $g'(x) \neq 0 \quad \forall x$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$

se $\lim_{x \to +\infty} \boxed{\frac{f'(x)}{g'(x)} = l}$ allora $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

dim $\quad t = \frac{1}{x} \qquad x \in (a, +\infty) \qquad t \in \left(0, \frac{1}{a}\right)$

$x \to +\infty \qquad t \to 0^+$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} \longrightarrow l \quad \text{ne il caso precedente.}$$

l per $t \to 0^+$

$$\boxed{\frac{\left(f\left(\frac{1}{t}\right)\right)'}{\left(g\left(\frac{1}{t}\right)\right)'}} = \boxed{\frac{\boxed{f'\left(\frac{1}{t}\right)} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)}} \quad \Box$$

$\to l$

Applicazione

Criterio di derivabilità

$f : [a,b) \to \mathbb{R}$ continua in $x=a$, derivabile in (a,b)

se $f'(x) \to \ell \in \mathbb{R}$ (esiste) per $x \to a^+$

allora f è derivabile in $x=a$

e $f'(a) = \ell$.

---

dim

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell$$

$\Uparrow$ Hospital.

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{1} = \ell \quad \text{per ipotesi} \qquad \square$$

Non serve l'Hospital, basta Lagrange:

$$\underset{\displaystyle\downarrow\atop\displaystyle\ell}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}} = \underset{\displaystyle\downarrow\atop\displaystyle\ell}{f'(y)} \quad \text{con } y \in (a,x)$$

Es

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 1 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (i) è continua?
(ii) è derivabile? (iii) è C^1? ...

per $x \neq 0$ $\underbrace{f(x) = \frac{\sin x}{x}}$ quindi f è derivabile infinite volte in $x \neq 0$.

(i)

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ (x \neq 0)}} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0)$$

f è continua anche in $x = 0$.

(ii) Provo ad applicare il criterio precedente.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ (x \neq 0)}} f'(x) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)'$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(\cos x) \cdot x - \sin x}{x^2}$$

$$\overset{\text{Hospital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-(\sin x)\cdot \cancel{x} + \cancel{\cos x} - \cancel{\cos x}}{2\cancel{x}} = 0$$

quindi f è derivabile in 0 e $f'(0) = 0$.

e f' è continua in $x = 0$.

$\Rightarrow \quad f \in C^1(\mathbb{R})$.

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x\cdot\cos x - \sin x}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

f' è derivabile? se $x \neq 0$ sì:

$x \neq 0$: $\quad f''(x) = \left(\dfrac{x\cdot\cos x - \sin x}{x^2}\right)' = \dfrac{-x\sin x\cdot x^2 - (x\cos x - \sin x)2x}{x^4}$

$$= \frac{-x^2\sin x - 2x\cos x + 2\sin x}{x^3}$$

$$\lim_{x\to 0} f''(x) = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2\sin x - 2x\cos x + 2\sin x}{x^3}$$

$$\overset{\text{Hospital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-2x\cancel{\sin x} - x^2\cos x - \cancel{2\cos x} + \cancel{2x\sin x} + \cancel{2\cos x}}{3x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\cancel{x}\cos x}{3\cancel{x}} = -\frac{1}{3}$$

$$f''(0) = -\frac{1}{3} \qquad f \text{ è } C^2$$

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{-x^2 \sin x - 2x\cos x + 2\sin x}{x^3} & \text{per } x \neq 0 \\ -\dfrac{1}{3} & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

$$\sin x = \boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\cdots$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} = f(x)$$

← è definito anche per $x=0$

$f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Se $f(x) = \boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k}$ per $|x| < R$ ← raggio di convergenza

allora f è derivabile e

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\, a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) a_{k+1} x^k .$$

$$f''(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} \underbrace{k(k-1)\, a_k\, x^{k-2}}$$

$$f''(0) = 2 \cdot 1 \cdot a_2 = -\frac{1}{3}$$

$$a_2 = \frac{(-1)^1}{(2+1)!} = -\frac{1}{6}$$

$$f(x)=\begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{per } x\neq 0 \\ 0 & \text{per } x=0 \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x} & \text{per } x\neq 0 \\ 0 & \text{per } x=0 \end{cases}$$

$\lim_{x\to 0} f'(x)$ non esiste.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{x} = 0$$

ma $\lim_{x\to 0} \dfrac{2x\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}}{1}$ non esiste

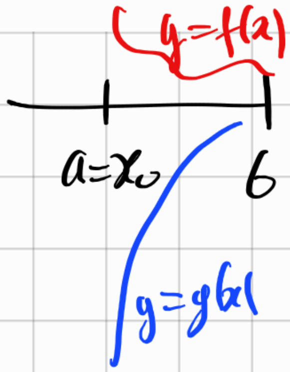
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{\hat{H}}{\underset{②}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \overset{①}{=} 42$$

Teorema dell'Hospital caso $\frac{\cdot}{\infty}$ "∞".

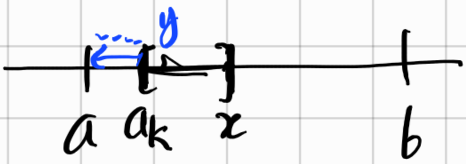
$\lim_{x\to x_0} |g(x)| = +\infty$ $\quad f,g : (a,b)\setminus\{x_0\} \to \mathbb{R}$ derivabili

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \quad \text{allora} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

dim $\quad x_0 \in \mathbb{R} \quad x \to x_0^+$



$a = x_0 \qquad f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$



Cauchy

$$\frac{f(a_k)-f(x)}{g(a_k)-g(x)} = \frac{f'(y)}{g'(y)} \sim \ell \qquad y \in (a_k, x)$$

? ℓ (H°)

$g(a_k) \to +\infty$

$$= \frac{\frac{f(a_k)}{g(a_k)} - \cancel{\frac{f(x)}{g(a_k)}}}{1 - \cancel{\frac{g(x)}{g(a_k)}}}$$

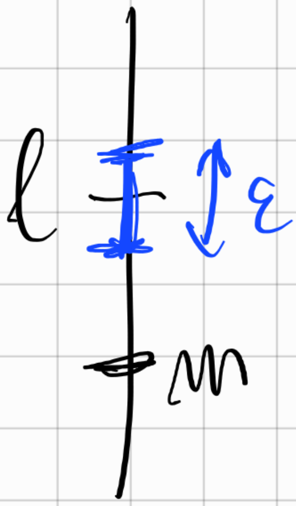
$\frac{f(x)}{g(a_k)} \to 0 \qquad \frac{g(x)}{g(a_k)} \to 0 \qquad \frac{f(a_k)}{g(a_k)} \to m$

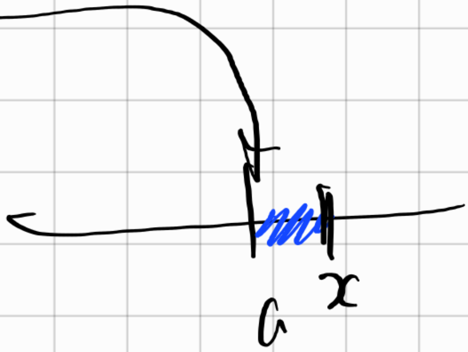
$k \to \infty$

$a_k \to a$

Ma se x è abbastanza vicino ad a

allora $\boxed{\frac{f'(y)}{g'(y)}}$ è arbitrariamente vicino a ℓ.





Se $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ non esiste o non è ℓ

in ogni caso esiste $a_k \to a$ t.c.

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} \frac{f(a_k)}{g(a_k)} = m \neq \ell.}$$

<u>Teorema di collegamento</u>

$$\boxed{\begin{array}{c} \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \\ \Updownarrow \\ \forall a_k \to x_0,\ a_k \neq x_0 \qquad \lim_{k\to+\infty} f(a_k) = \ell. \end{array}}$$

$\square$