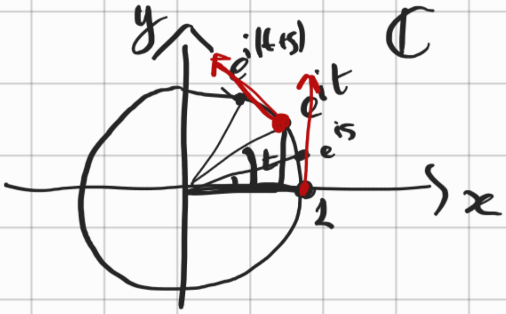
ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 40 - 10.1.2022

Funzioni trigonometriche:

$$\begin{cases} \cos x = \operatorname{Re} e^{ix} = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4!} + \dots \\ \sin x = \operatorname{Im} e^{ix} = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dots \end{cases}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \underline{|e^{ix}| = 1}$$

$$\frac{\sin x}{x} \to 1 \text{ per } x \to 0 \qquad \frac{1-\cos x}{x^2} \to \frac{1}{2} \text{ per } x \to 0$$



$$\to |e^{it}|^2 = e^{it} e^{-it} = 1$$

$s, t \in \mathbb{R}$

$$e^{i(t+s)} = e^{it} \cdot e^{is} \leftarrow \text{ha come argomento (angolo) la somma degli argomenti}$$

$$e^{i \cdot 0} = 1$$

$t \mapsto e^{it}$ è un moto circolare ~~uniforme~~ sulla circonferenza unitaria di $\mathbb{C}$.

$$\lim_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z} \to 1$$

con che velocità?

per $t=0$

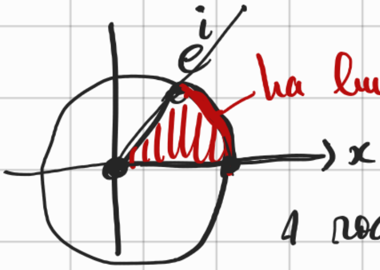
$$v = \lim_{t \to 0} \frac{e^{it} - e^{i0}}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{e^{it} - 1}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{e^{it}-1}{it} \cdot i = i$$

$|v| = 1$

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{i(t+h)} - e^{it}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{it}\,(e^{ih}-1)}{h}$$

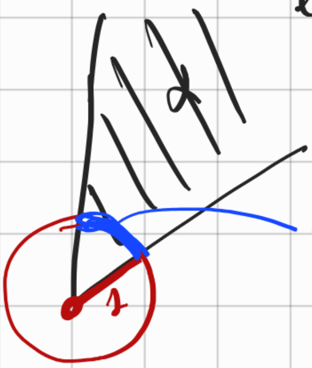
$$= e^{it} \cdot i$$ ← ha modulo 1.

$t \mapsto e^{it}$ è un moto circolare uniforme con velocità 1.



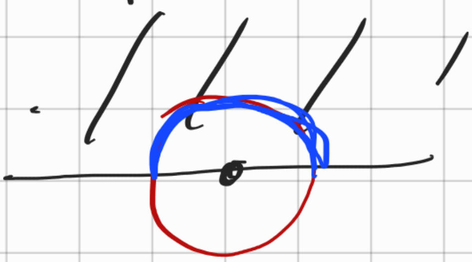
ha lunghezza 1 lo chiamiamo radiante.

1 radiante è la misura dell'angolo tale che la lunghezza dell'arco corrispondente ad un arco di lunghezza 1 sulla circonferenza unitaria



misura in radianti dell'angolo α.

π sarà la misura in radianti dell'angolo piatto: ovvero la lunghezza di metà circonferenza unitaria



$$\pi = \frac{\text{metà circonferenza}}{\text{raggio}} = \frac{\text{circonferenza}}{\text{diametro}}.$$

Teorema (definizione di π)

π è il più piccolo reale positivo x tale che

$\sin x = 0$, $2.8 < \pi < 4$.

Le funzioni: $\sin x$, $\cos x$, e^{ix} sono

periodiche di periodo 2π.

Inoltre $\sin x$ è strett crescente

su $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\cos x$ è strett decresc.

in $[0, \pi]$. Infine:

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x}$$

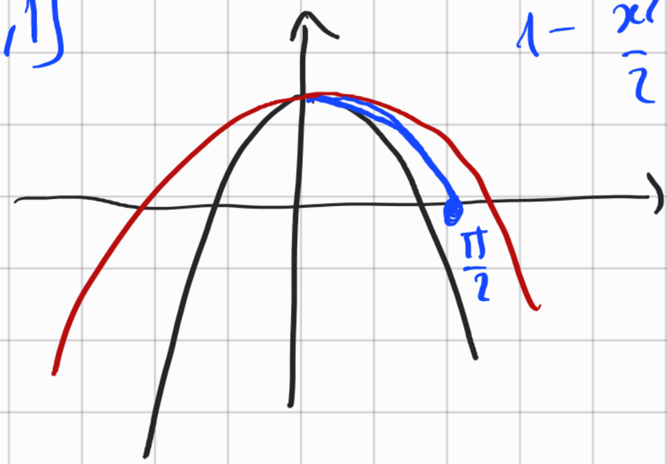
dim idea

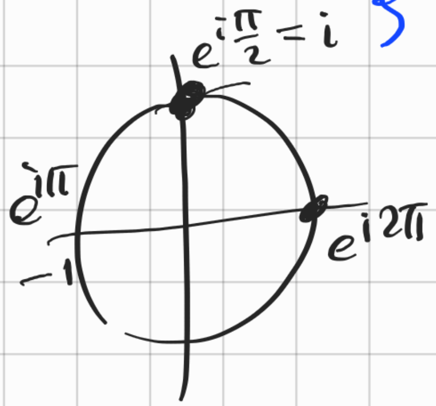
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \boxed{\ldots}$$

stimare questo errore

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \boxed{\ldots}$$

$x \in [0,1]$ $\quad 1-\frac{x^2}{2} \le \cos x \le 1-\frac{4}{9}x^2$

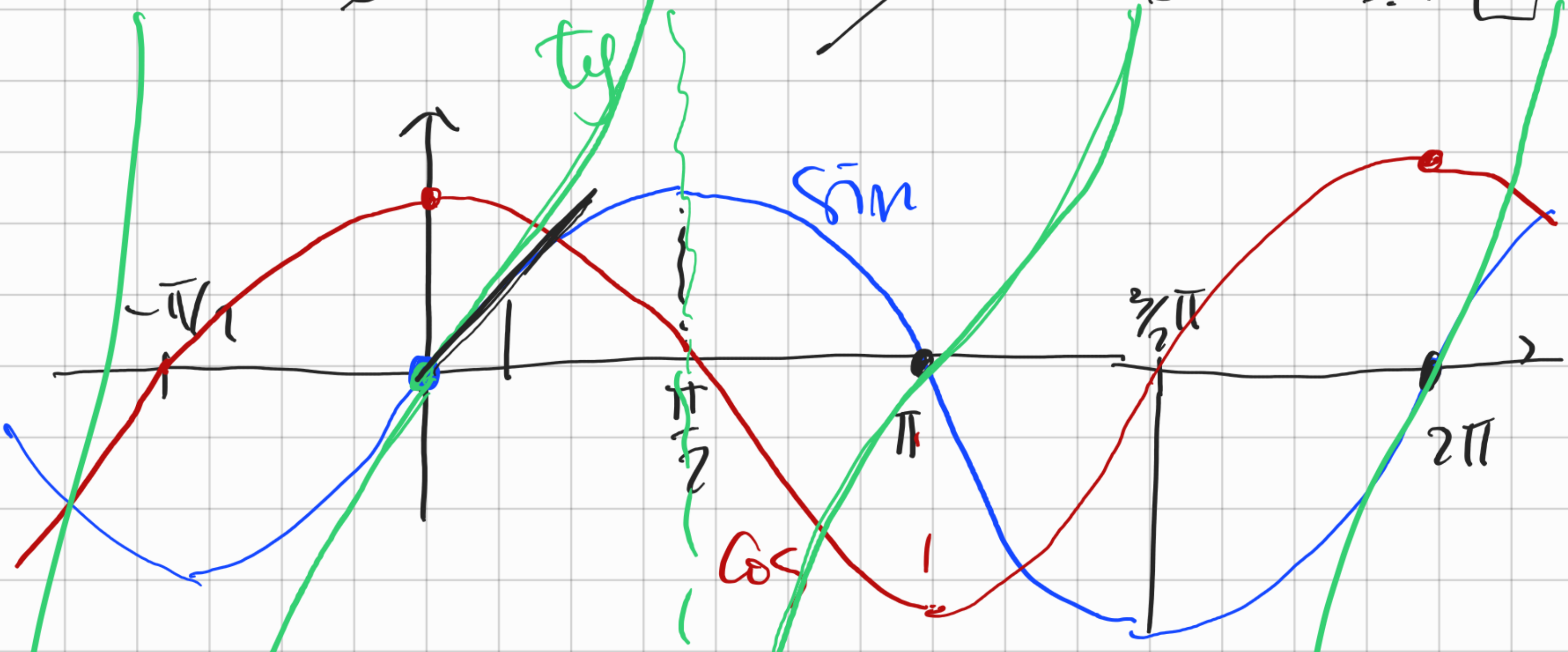




$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i \qquad e^{i\pi} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)} = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^2 = i^2 = -1.$$

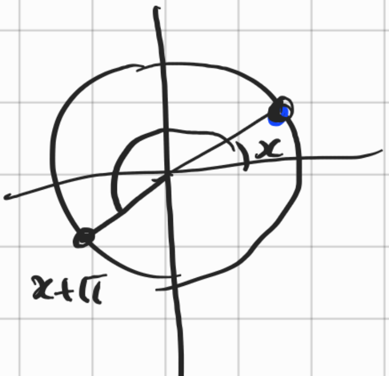
$$e^{2\pi i} = \left(e^{i\pi}\right)^2 = (-1)^2 = 1$$

$$e^{i(x+2\pi)} = e^{ix}\cdot \cancel{e^{i2\pi}} = e^{ix} \quad \ldots \square$$

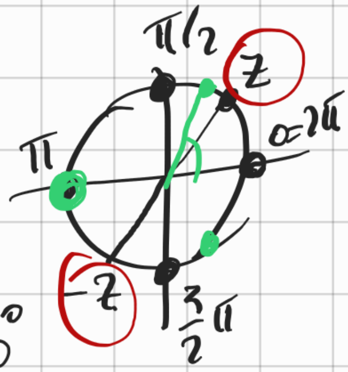


$$e^{i(x+\pi)} = e^{ix}\cdot e^{i\pi} = -e^{ix}$$

$$\begin{cases} \sin(x+\pi) = -\sin(x) \\ \cos(x+\pi) = -\cos(x) \end{cases}$$



$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$



Angoli notevoli

	0	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)	π (180°)	$\frac{3}{2}\pi$
e^{ix}	1				i	-1	$-i$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\to \pm\infty$		

$$z = e^{i\frac{\pi}{4}} \qquad z^2 = \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

$$z^2 = i \qquad z = x + iy$$

$$z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = i$$

$$\begin{cases} x^2 = y^2 \\ 2xy = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y \\ 2x^2 = 1 \end{cases} \qquad x>0,\ y>0 \quad \begin{cases} y = x \\ x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

x, y hanno lo stesso segno

$$z = e^{i\pi/3} \qquad z = x+iy \qquad z^3 = e^{i\pi} = -1$$

$$-1 = (x+iy)^3 = x^3 + 3x^2 iy - 3xy^2 - iy^3$$

$$= x^3 - 3xy^2 + i\left(3x^2y - y^3\right)$$

$$\begin{array}{c} 1\ 1 \\ 1\ 2\ 1 \\ 1\ 3\ 3\ 1 \end{array}$$

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = -1 \\ 3x^2y - y^3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x\left(x^2 - 3y^2\right) = -1 \\ y\left(3x^2 - y^2\right) = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\cancel{\begin{cases} y = 0 \\ x = -1 \\ z = -1 \end{cases}}} \qquad \begin{cases} x\left(x^2 - 9x^2\right) = -1 \\ y^2 = 3x^2 \end{cases}$$

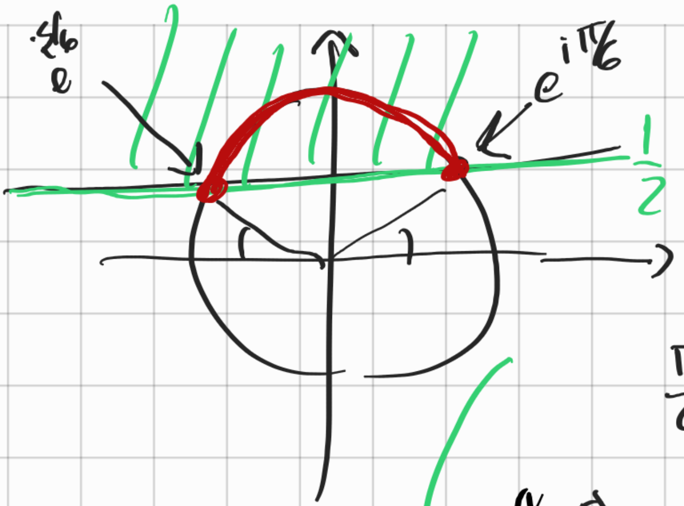
$$\begin{cases} -8x^3 = -1 \\ \% \end{cases} \qquad \begin{cases} x^3 = \frac{1}{8} \\ y = \pm\sqrt{3}\,x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

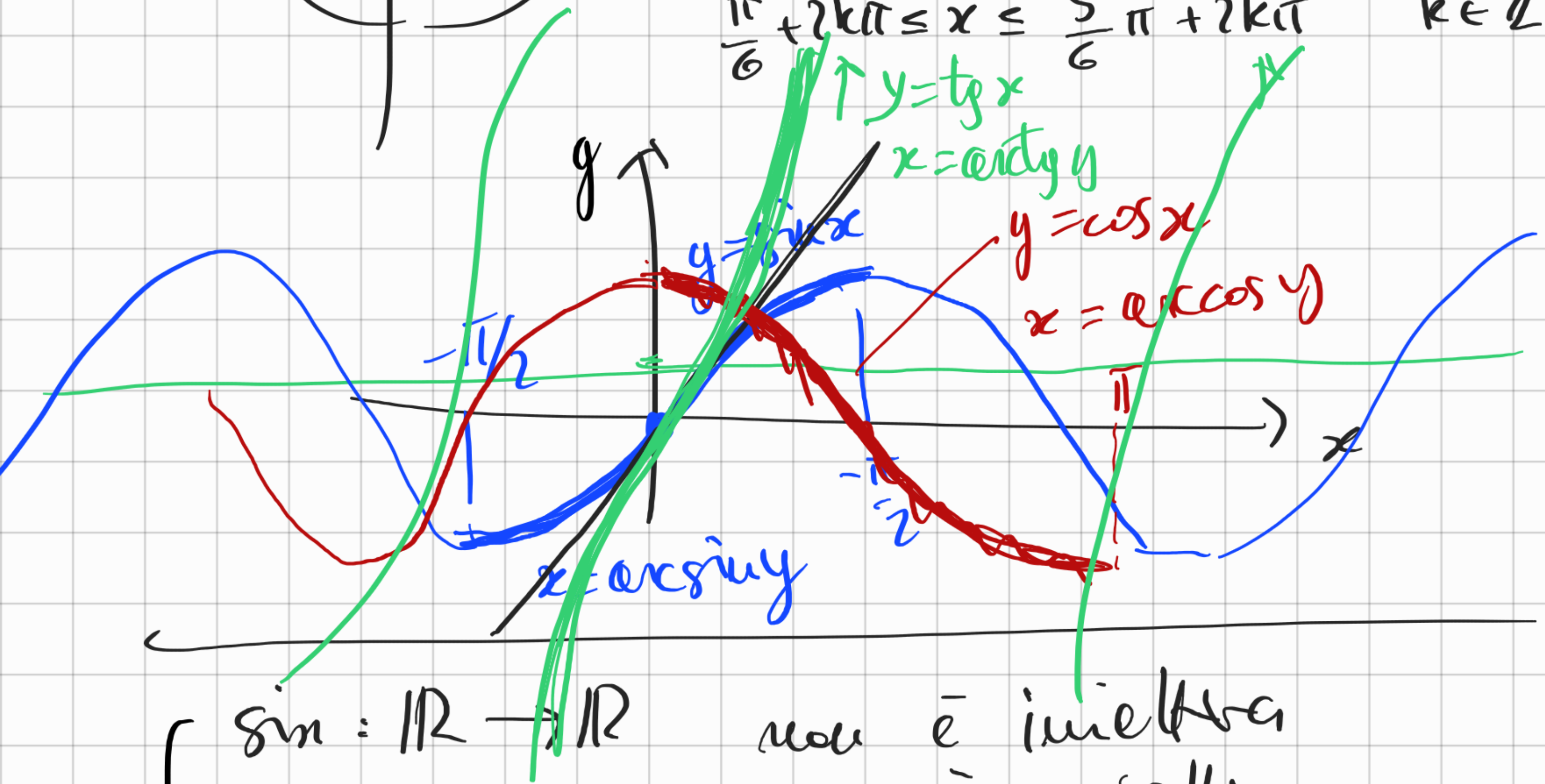
$$\begin{cases} \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \end{cases}$$

ES

$$\sin x \geq \frac{1}{2}$$



$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$



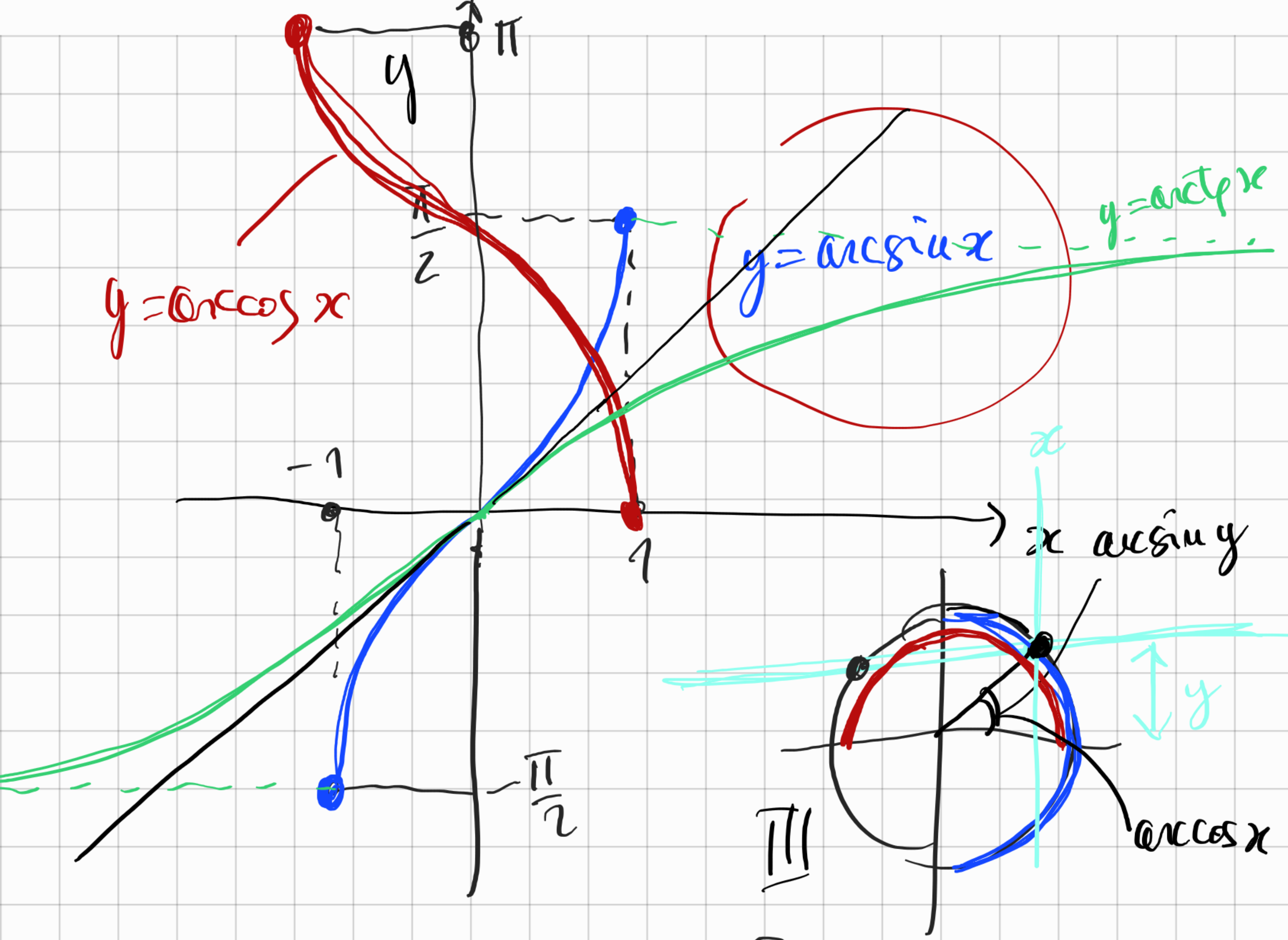
$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non è iniettiva
non è suriettiva

$\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ è suriettiva.
ma non iniettiva

$\tilde{\sin} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ è bigettiva
è strett. crescente,
continua.

$\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

è strett. crescente e continua.
è la funzione inversa di $\tilde{\sin}$



$\tilde{\cos} : [0,\pi] \longrightarrow [-1,1]$ bigettiva

strett. decrescente

$\arccos : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$

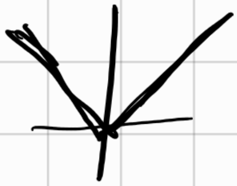
è la funzione inversa di $\tilde{\cos}$

<u>Esercizio</u> disegnare il grafico di

$f(x) = \arcsin \sin x$

$g(x) = \arccos \cos x$

$h(x) = \operatorname{arctg} \operatorname{tg} x$

(Es $\sqrt{x^2} = |x|$ )

Arcotangente

$\tan = tg$

$\tilde{tg} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ è bigettiva, strett. crescente, continua

$$tg\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

è la funzione inversa, è continua, strettamente crescente.

$$\lim_{x \to +\infty\,(-)} \operatorname{arctg} x = (-)\frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$
