ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 30 — 29.11.2021

Successioni ricorsive

Metodo di Erone per calcolare $\sqrt{p}$ $p>1$.

$$\begin{cases} a_0 = p \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n + \frac{p}{a_n}}{2} \end{cases}$$

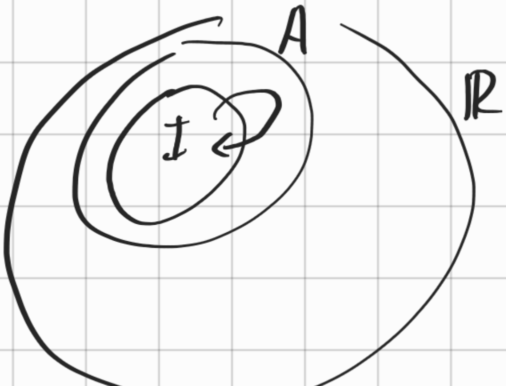
① $a_n \geq \sqrt{p} \quad \forall n$

$(\sqrt{p}, +\infty)$ è invariante

In generale $\boxed{a_{n+1} = f(a_n)}$ ← autonoma $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

def $I \subseteq A$ è invariante se $f(I) \subseteq I$

$x \in I \Rightarrow f(x) \in I$.



$a_n \in I \Rightarrow a_{n+k} \in I \quad \forall k \geq 0$

② a_n è decrescente in quanto:

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{f(x) \leq x} \quad \forall x \in I \\ a_{n+1} = f(a_n), \ a_n \in I \ \forall n, \end{array}\right\} \quad a_{n+1} \leq a_n$$

③ $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$ esiste, $a_n \in (\sqrt{p}, +\infty) \ \forall n$

$\Downarrow$

$\ell \in [\sqrt{p}, +\infty]$

in realtà a_n decrescente $\ell \leq a_0 = p$

$\Rightarrow \ell \in [\sqrt{p}, p]$

(4) Se a_n converge, $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$

$$a_{n+1} = f(a_n) = \frac{a_n + \frac{p}{a_n}}{2}$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

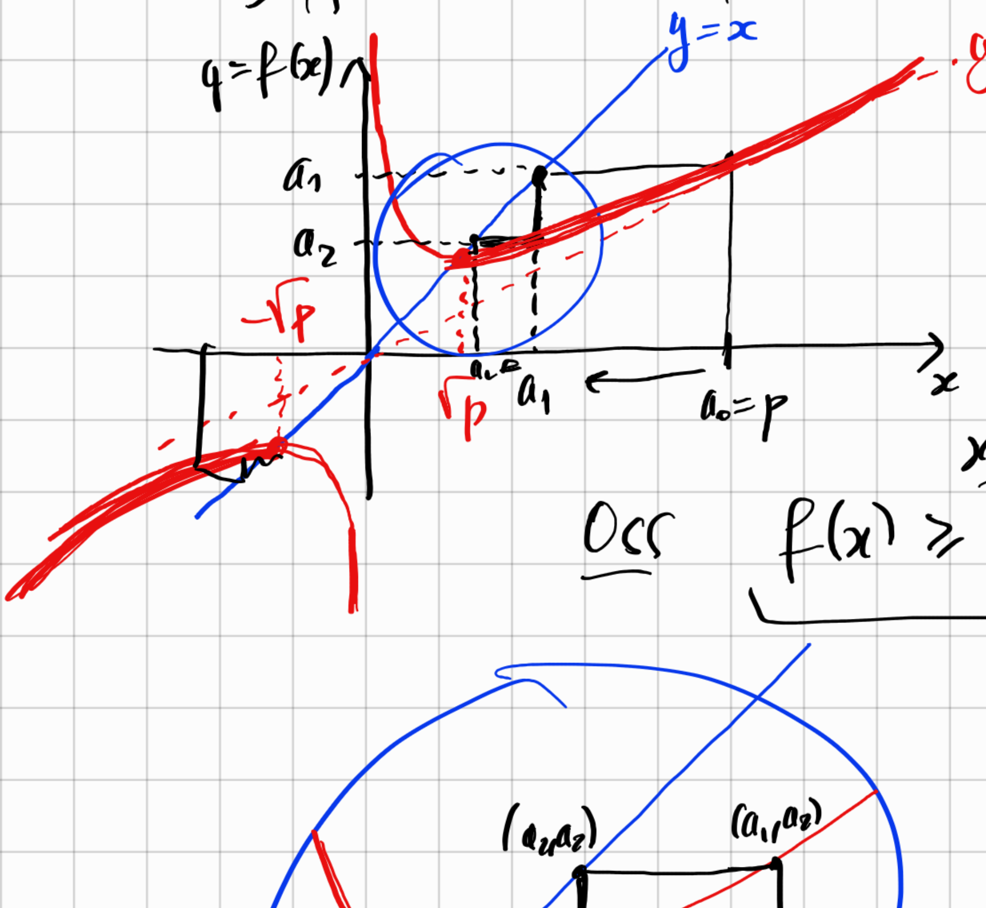
$$\underbrace{\ell \overset{(*)}{=} f(\ell)} = \frac{\ell + \frac{p}{\ell}}{2} \qquad \underline{\ell \text{ è un punto fisso}}$$

def Se $\boxed{f(x) = x}$ diremo che x è un punto fisso per f

(4) $\ell = \pm\sqrt{p}$ ma $\ell \in [\sqrt{p}, p]$

$$\Rightarrow \ell = \sqrt{p}$$

DIAGRAMMI A RAGNATELA

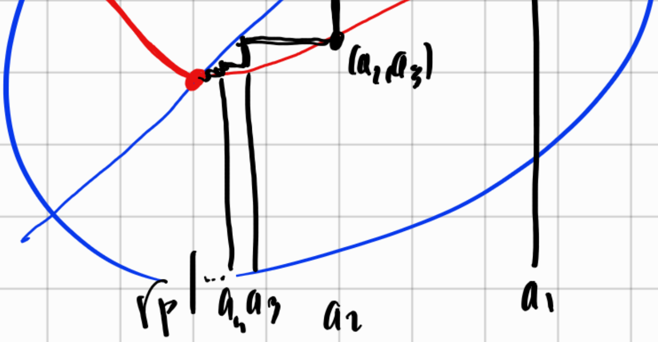


$$y = \frac{x}{2} + \frac{p}{2x}$$

$f(x)=x$

$x \geq 0$

Oss $f(x) \geq \sqrt{p}$



Oss a_n è ben definita perché

$a_0 = \alpha \in A$ $\qquad f : A \to \mathbb{R}$

A è invariante $\quad f(A) \subseteq A$

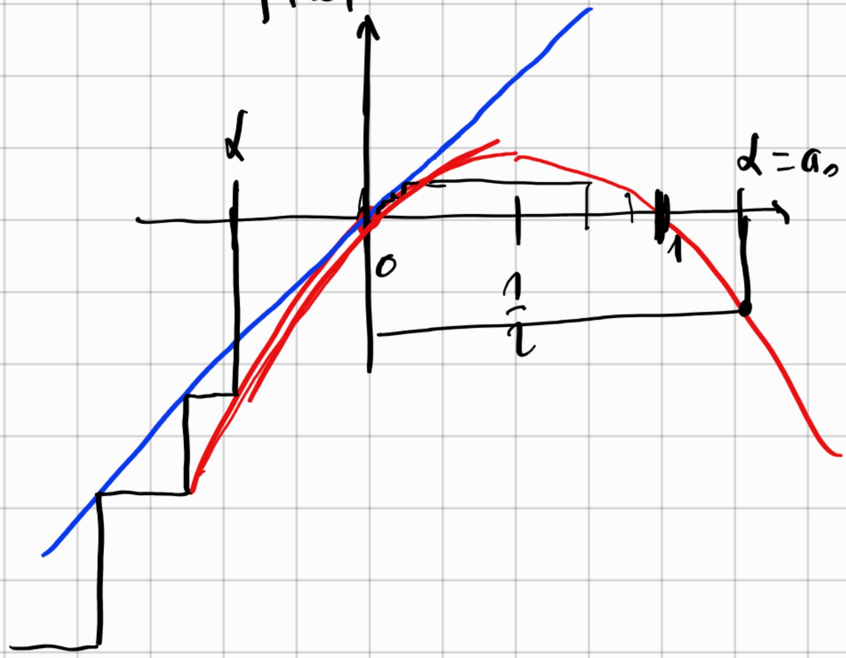
$f : \underbrace{A \to A}$

$a_n = f^{(n)}(\alpha)$

$a_0 = \alpha$
$a_1 = f(\alpha)$
$a_2 = f(f(\alpha))$
$\vdots$
$a_n = \underbrace{f(f(\dots f(\alpha)\dots)}_{n\text{-volte}}$

ES $\begin{cases} a_0 = \alpha \\ a_{n+1} = a_n - a_n^2 \end{cases}$ $\qquad a_{n+1} = f(a_n)$

$f(x) = x - x^2 = x(1-x)$



$f(x) = x$

$x - x^2 = x$

$x^2 = 0$

$\begin{cases} f(x) \leq x \quad \forall x \\ \Downarrow \\ a_{n+1} \leq a_n \end{cases}$

a_n è decrescente? $\qquad a_{n+1} \overset{?}{\leq} a_n$

$$f(a_n) \overset{?}{\leq} a_n \qquad \underline{\text{SI}}$$

$[0,1]$ è invariante?

$$0 \leq x \leq 1 \overset{?}{\Longrightarrow} \underbrace{0 \leq f(x) \leq \frac{1}{4}}$$

$$0 \leq x - x^2 \leq \frac{1}{4} \qquad\qquad x^2 - x + \frac{1}{4} \geq 0$$

$$\uparrow \qquad\qquad \uparrow \qquad\qquad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$$

$$\forall x \qquad\qquad\qquad \forall x$$

$x - x^2 \geq 0$

$x(1-x) \geq 0$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 1 \end{cases} \qquad x \in [0,1].$$

$$f([0,1]) = [0, \tfrac{1}{4}] \subseteq [0,1]$$

$[0,1]$ è invariante.

(1) Se $\alpha \in [0,1]$, $a_n \in [0,1]$ $\forall n$

a_n decrescente $\qquad \lim_{n \to +\infty} a_n = \ell$ esiste

$\ell \in [0,1]$

$$a_{n+1} = a_n(1-a_n)$$
$$\downarrow \qquad \downarrow$$
$$l = l(1-l) \iff l = 0$$

(2) Se $\alpha < 0$ $\quad a_n$ decrescente

$a_n \to l \in \overline{\mathbb{R}}$ $\qquad \underbrace{l \le a_0 = \alpha < 0}$

$$\underbrace{\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n(1-a_n) \\ \downarrow \quad & \\ l &= l(1-l) \end{aligned}} \qquad \text{se } l \in \mathbb{R} \Rightarrow l = 0$$

$l = \pm\infty$ $\qquad l < 0 \Rightarrow l \neq +\infty$

$l = -\infty$ per esclusione.

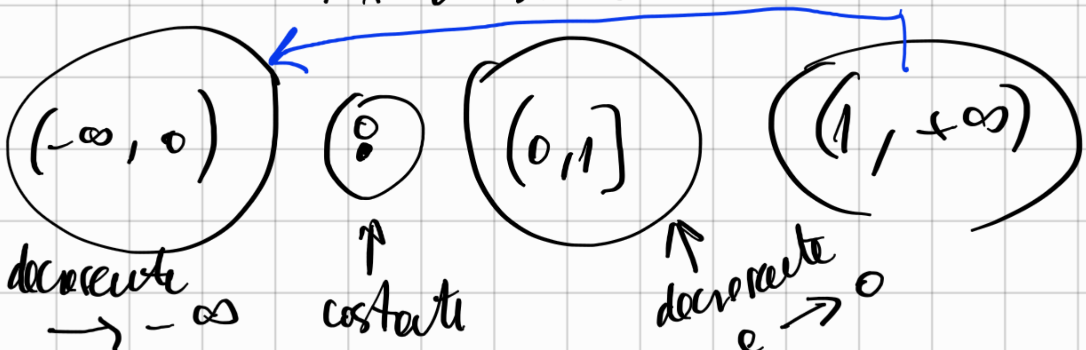
$l \to -\infty$ $\quad \left[\, l(1-l) \to -\infty \cdot +\infty = -\infty . \,\right]$

(3) $\alpha > 1 \Rightarrow a_0 = \alpha,\ a_1 < 0$

$(f(x) < 0 \text{ se } x > 1)$.

ricado nel caso (2) $\quad a_n \to -\infty$.

DIAGRAMMA di STATO



Esercizio (Fibonacci)

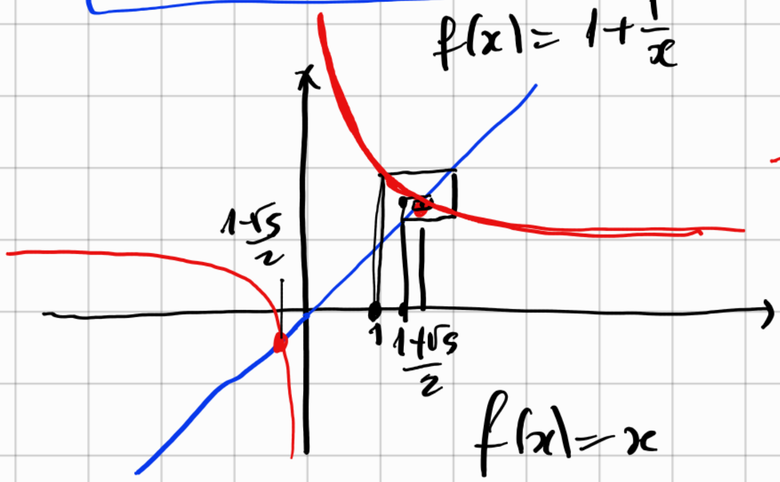
$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ \boxed{F_{n+2} = F_{n+1} + F_n} \end{cases}$$

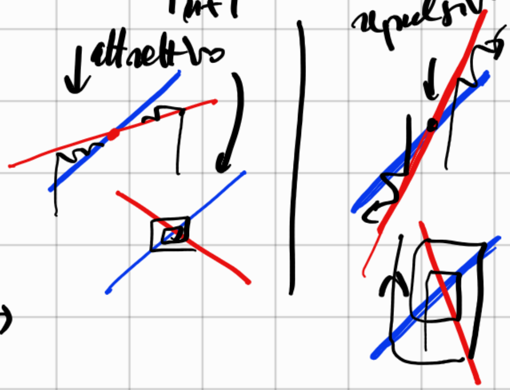
$$\begin{array}{ccccccccccc} & 1 & 2 & \frac{3}{2} & \frac{5}{3} & \frac{8}{5} & \ldots \\ \cancel{0}, & 1, & 1, & 2, & 3, & 5, & 8, & 13, & 21, & 34, & \ldots \end{array}$$

$$a_n = \frac{F_{n+1}}{F_n} \qquad \lim a_n = ?$$

$$\boxed{\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{a_n} \end{cases}} \qquad a_{n+1} = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = \frac{F_{n+1} + F_n}{F_{n+1}} = 1 + \frac{F_n}{F_{n+1}} = 1 + \frac{1}{a_n}$$

$f(x) = 1 + \frac{1}{x}$





$$f(x) = x \qquad 1 + \frac{1}{x} = x$$

$$x + 1 = x^2$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x_{12} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Intuitivamente a_n converge oscillando verso $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Idea: proviamo a dimostrare che a_{2n+1} è crescente e a_{2n} è decrescente.

Brutalmente

$$a_{2n+3} \overset{?}{\geq} a_{2n+1}$$

$$f(f(a_{2n+1})) \overset{?}{\geq} a_{2n+1}.$$

Teorema 1 Sia $a_{n+1} = f(a_n)$, I intervallo invariante $a_0 \in I$. Se f è crescente su I allora a_n è monotona.

dim

$$a_{n+1} = f(a_n)$$

$$a_{n+1} \overset{\geq}{\leq} a_n \Rightarrow f(a_{n+1}) \overset{\geq}{\leq} f(a_n)$$
$$a_{n+2} \overset{\geq}{\leq} a_{n+1}$$

Se $a_1 \leq a_0 \Rightarrow a_n$ è decrescente

Se $a_1 \geq a_0 \Rightarrow a_n$ è crescente $\square$

(Teo $f(x) \geq x \Rightarrow a_n$ crescente

Teo $f(x) \leq x \Rightarrow a_n$ decrescente)

Teorema 2 Sia $a_{n+1} = f(a_n)$, I invariante

se f è decrescente su I allora

a_{2n} e a_{2n+1} sono monotone.

(una crescente, l'altra decrescente)

dim f decrescente $\Rightarrow$ $f \circ f$ è crescente

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Uparrow$$

$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)) \leq f(f(x_2))$$

$$a_{2n+2} = f(a_{2n+1}) = f(f(a_{2n})) = (f \circ f)(a_{2n})$$

$$a_{2n+3} = f(a_{2n+2}) = f(f(a_{2n+1})) = (f \circ f)(a_{2n+1})$$

per il Teo 1 $\quad a_{2n}$ è monotona
$\quad\quad a_{2n+1}$ è monotona. $\square$

(Se a_{2n} è crescente $\quad a_{2n+2} \geq a_{2n}$

$f(a_{2n+2}) \leq f(a_{2n})$ (f decrescente)

$\underline{a_{2n+3} \leq a_{2n+1}}$

a_{2n+1} è decrescente)

Tornando all'esercizio

$(0,+\infty)$ è invariante $\quad (x>0 \Rightarrow f(x)>0)$

f è decrescente su $(0,+\infty)$

a_{2n} e a_{2n+1} sono monotone

quindi hanno limite

$a_{2n} \to \ell_1 \qquad a_{2n+1} \to \ell_2$

ℓ_1 è punto fisso di $f \circ f$
ℓ_2 pure.

Trovo i punti fissi di $f \circ f$ .... $\quad f(f(x)) = x$

$f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ $\quad$ ⌊