# ANALISI MATEMATICA B
# LEZIONE 28 - 24.11.2021

per $n \to +\infty$

$$\sqrt[2n+1]{-n} = -\sqrt[2n+1]{n} = -e^{\frac{\ln n}{2n+1}} \to -e^{0} = -1.$$

$$?? \quad \| \qquad (-n)^{\frac{1}{2n+1}} \overset{\text{NO}}{=} e^{\frac{\ln(-n)}{2n+1}}$$

---

**Def** la serie $\sum a_n$ converge assolutamente se la serie $\sum |a_n|$ converge.

**Teo** se $\sum |a_n|$ converge allora $\sum a_n$ converge

convergenza assoluta $\Rightarrow$ convergenza (semplice)

## Serie a segni alterni

**Esempio** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge? $\qquad \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$

non è assolutamente convergente: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

serie armonica a segni alterni.

$\frac{(-1)^n}{n} \to 0$ per $n \to +\infty$

$a_n = (-1)^n$

$0$

$-\frac{1}{n} \le \frac{(-1)^n}{n} \le \frac{1}{n} \to 0$

$a_n$ è limitata
$b_n$ è infinitesima
($b_n \to 0$)
Allora $a_n b_n \to 0$

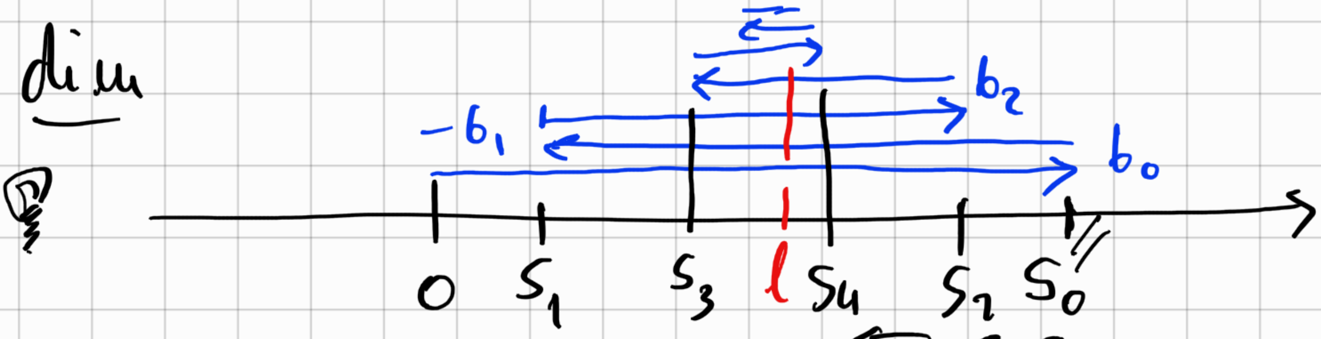
la condizione necessaria per la convergenza è verificata.

$$\left( b_n = \frac{1}{n} \right)$$

<u>Teorema</u> (criterio di Leibniz) $b_n \geq 0$, $b_n$ decrescente, $b_n \to 0$ per $n \to +\infty$. $a_n = (-1)^n b_n$

allora $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot b_n$ è convergente

<u>dim</u>




$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n b_n = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 \dots$$

$$\begin{cases} S_0 = a_0 = (-1)^0 b_0 = b_0 \\ S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \end{cases}$$

① $S_{2n+1}$ è crescente?

$$\boxed{S_{2n+1} = S_{2n} + (-1)^{2n+1} b_{2n+1} = S_{2n} - b_{2n+1}}$$

$$= S_{2n-1} + (-1)^{2n} b_{2n} - b_{2n+1}$$

$$= S_{2n-1} + \underbrace{b_{2n} - b_{2n+1}}_{\geq 0}$$

$b_{2n+1} \leq b_{2n}$ ($b_n$ è decrescente)

$$S_{2n+1} \geq S_{2n-1}$$

② $S_{2n}$ è decrescente?

$$S_{2n} = \underbrace{S_{2n-1}} + b_{2n} = S_{2n-2} \underbrace{- b_{2n-1} + b_{2n}}_{} \quad \leq 0$$

$$b_{2n-1} \geq b_{2n} \quad (b_n \text{ è decrescente})$$

$$S_{2n} \leq S_{2n-2}$$

$S_{2n+1}$ crescente $\Rightarrow$ ha limite $\ell$

$$S_{2n+1} \to \ell \qquad (S_{2n+1} \leq \ell)$$

$S_{2n}$ decrescente $\Rightarrow$ ha limite $m$

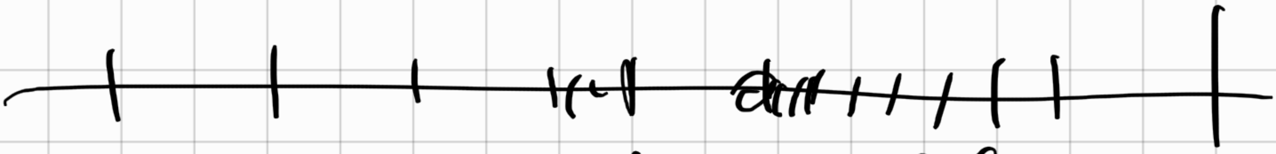
$$S_{2n} \to m \qquad S_{2n} \geq m$$

$$S_{2n+1} = S_{2n} + (-1)^{2n+1} b_{2n+1}$$

$$S_{2n+1} - S_{2n} = (-1)^{2n+1} b_{2n+1} = - b_{2n+1} \leq 0$$

$$\ell - m = 0$$

$$S_{2n+1} \leq S_{2n}$$



$s_1 \le s_3 \le s_5 \le \dots \le l \qquad m \le s_6 \, s_4 \, s_2 \le s_0$

$-\infty < s_1 \le l \le m \le s_0 < +\infty \qquad l, m \in \mathbb{R}$

$l = m$.

$s_{2n+1} \to l \qquad s_{2n} \to l$

$\Rightarrow \quad s_n \to l$ $\square$

---

ES $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ soddisfa il teorema (salvo il fatto, irrilevante, che non è definita per $n=0$)

dunque converge ma non assolutamente.

---

Esercizio 1 $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}$ per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie converge?

Esercizio 2 $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^k}{\ln k}$ per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie converge?

Esercizio 1

1. condizione necessaria per la convergenza $\frac{x^k}{k} \to 0 \iff \frac{|x^k|}{k} \to 0$

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{x^k}{k} = \begin{cases} +\infty & x > 1 \\ 0 & \boxed{-1 \leq x \leq 1} \\ \nexists & x < -1 \end{cases}$$

$x^k \gg k$ $(x > 1)$

Se $|x| > 1$ la serie non converge

$x > 1$ la serie diverge

$x < -1$ è indeterminata

si potrebbe dimostrare

non era richiesto

2. Convergenza assoluta

$$\sum \left| \frac{x^k}{k} \right| = \sum \frac{|x|^k}{k}$$

criterio radice $\sqrt[k]{\frac{|x|^k}{k}} = \frac{|x|}{\sqrt[k]{k}} \to \frac{|x|}{1} = |x|$.

$|x| < 1$ la serie converge assolutamente. =

3. $x = 1$ è la serie armonica: diverge

4. $x = -1$ è la serie armonica a segni alterni: converge.

→ Leibniz

I compitino 19/12/2019

Esercizio

$$\sum_{k} \frac{1 - x^k \cdot \ln k}{k \cdot \ln(x^2 + k)}$$

per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie converge?