ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 26 19.11.2021

SERIE $\quad a_k \quad \sum a_k$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$$

Carattere: $\quad \lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$

regolare se la somma esiste

convergente: se $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \in \mathbb{R}$

divergente: se $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \in \{+\infty, -\infty\}$

indeterminata se $\lim_{n\to+\infty} S_n$ non esiste.

Es
$$\sum_{k=1}^{+\infty} k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} k = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2}\cdot n = +\infty$$

è una serie divergente

Es (Serie di Mengoli)
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+k}$$

Serie telescopica: $\quad \dfrac{1}{k^2+k} = \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \cancel{\dots} + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} \longrightarrow 1 \quad \text{per } n \to +\infty$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k} = 1$$

é una serie convergente

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = ?$$

[Problema di Basilea]

<u>Es</u> serie geometrica se $|q|<1$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

$q=1$ $\quad \sum_{k=0}^{+\infty} 1 = +\infty$

$q=-1$ $\quad \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k$

$\to \left(1 \cancel{-1}\right) + \left(1 \cancel{-1}\right) + \left(1 \cancel{-1}\right) + 1 + \dots \overset{?}{=} 0$

$$\to \quad 1+(-\cancel{1}+1)+(-\cancel{1}+1)+(-\cancel{1}+1)\dots \overset{?}{=} 1$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ pari} \\ 1 & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} S_{2n} = 0 \to 0 \\ S_{2n+1} = 1 \to 1 \end{array}\right\} \Rightarrow S_n \text{ non ha limite}$$

$\sum (-1)^k$ è indeterminata.

<u>Oss</u>

$$\underbrace{1}_{1} - 1 + \underbrace{1+1}_{2} - 1 + \underbrace{1+1+1}_{3} - 1 \;\underbrace{\dots\dots}_{4} = +\infty$$

$a_0 = 1$, $a_1 = -1$

$a_2 = 1$, $a_3 = 1$, $a_4 = -1$

$a_5 = 1$, $a_6 = 1$, $a_7 = 1$, $a_8 = -1$

scrivere $a_k = \begin{cases} -1 & k \ldots k \in \mathbb{N} \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$ qualcosa del genere

---

<u>Serie a termini positivi</u> $\quad \sum a_k$ con $a_k \geq 0$

<u>Teorema</u> Se $a_k \geq 0$, $\sum a_k$ è regolare

cioè è convergente o divergente a $+\infty$.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \in [0, +\infty]$$

<u>dim</u> $\quad S_n$ è crescente: $S_{n+1} = S_n + a_n \geq S_n$.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \geq a_0 \geq 0$$ □

Criteri di confronto

Siano $a_k \geq 0$, $b_k \geq 0$.

Consideriamo le serie $\sum a_k$, $\sum b_k$.

esistono per il teorema precedente

Se $a_k \leq b_k$ allora $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} b_k \leq +\infty$

dim

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k, \quad R_n = \sum_{k=0}^{n-1} b_k$$

per confronto

$$a_k \leq b_k \Rightarrow S_n \leq R_n \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n \leq \lim_{n\to+\infty} R_n$$

per induzione

□

Corollario: se $0 \leq a_k \leq b_k$

Se $\sum b_k$ converge $\Rightarrow \sum a_k$ converge

Se $\sum a_k$ diverge $\Rightarrow \sum b_k$ diverge

Es

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

$$\frac{1}{k^2} \geq \frac{1}{k^2+k} = \frac{1}{k(k+1)}$$

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k^2-k} = \frac{1}{(k-1)\cdot k}$$

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k^2-k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2-k} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)\cdot k} \underbrace{=}_{j=k-1} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j(j+1)} = 1$$

$$\boxed{\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2}} \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2-k} = 1$$

$$\vee\!|$$

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2+k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+k} - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

<u>Es</u> determinare il carattere della serie

$$(*) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{k^3 + \lfloor \sqrt{k} \rfloor}$$

$$0 \leq \frac{k}{k^3 + \lfloor k \rfloor} \leq \frac{k}{k^3} = \frac{1}{k^2}$$

$\sum \frac{1}{k^2}$ è convergente quindi anche $(*)$ è convergente.

<u>Osservazione</u> il carattere di una serie $\sum a_k$ non cambia se modifico un numero finito di addendi. (la somma può cambiare)

Criterio di confronto asintotico:

① $\underbrace{a_k > 0, \ b_k > 0}$, $a_k << b_k$

$$\left[\lim_{k \to +\infty} \frac{a_k}{b_k} = 0 \right]$$

allora

→ se $\sum b_k$ converge allora $\sum a_k$ converge
se $\sum a_k$ diverge allora $\sum b_k$ diverge.

dim

$\frac{a_k}{b_k} \to 0 \quad \exists N : k \geq N \Rightarrow \frac{a_k}{b_k} \leq 1 \qquad \underbrace{a_k \leq b_k}$

$$\sum_{k=N}^{+\infty} b_k \text{ converge} \Rightarrow \sum_{k=N}^{+\infty} a_k \text{ converge}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \text{ converge } \square.$$

② Se $a_k > 0$, $b_k > 0$, $a_k \sim b_k$

$$\boxed{\text{significa} \quad \lim_{k \to +\infty} \frac{a_k}{b_k} = 1}$$

$\sum a_k$ e $\sum b_k$
hanno lo stesso carattere.

Es

$$\frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{k^2+k} \qquad \frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{k^2+k}} = \frac{k^2+k}{k^2} = 1 + \frac{1}{k} \to 1$$

per $k \to +\infty$.

dim

$$\frac{a_k}{b_k} \to 1$$

definitivamente

$$\frac{1}{2} \le \frac{a_k}{b_k} \le 2$$

$$\begin{cases} b_k \le 2a_k \\ a_k \le 2b_k \end{cases}$$

Se $\sum a_k$ (b_k) converge $\quad \sum 2a_k$ (b_k) converge

$\Downarrow$

$\sum b_k$ (a_k) converge

$\square$

[Oss se $\frac{a_k}{b_k} \to 7$ $\quad \frac{a_k}{7b_k} \to 1$

$a_k \sim 7b_k$]

Esercizio $\sum \frac{1}{n!}$ converge perché $n! \gg n^2$

$$\frac{1}{n!} \ll \frac{1}{n^2}$$

Esercizio.

$$\sum \frac{1}{\underbrace{n+2^n-n^n}}$$

$$n+2^n-n^n = n^n\left(\frac{n}{n^n} + \frac{2^n}{n^n} - 1\right)$$

è a termini (definitivamente) negativi.

<u>Oss</u> $\sum(-a_k) = -\sum a_k$

In generale $\sum(\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum a_k + \mu \sum b_k$.

(se le serie convergono)

$$\sum \lambda a_k = \lambda \sum a_k$$

[Se $\lambda \neq 0$ $\sum \lambda a_k$ ha lo stesso carattere di $\sum a_k$.]

<u>Studio</u> $\sum \frac{1}{n^n - 2^n - n}$

$$\frac{1}{n^n - 2^n - n} \underset{\circledast}{<<} \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

⌂ $\circledast$: $\lim_{n \to +\infty} \frac{2^n}{n^n - 2^n - n} = 0$

<u>Es</u> ⌂ $\sum \frac{n! + 2}{(n+2)!}$ converge?

LA SERIE ARMONICA

Condizione necessaria: $\sum a_k$ converge $\Rightarrow a_k \to 0$ $\not\Leftarrow$

$a_n = \frac{1}{n} \to 0$

ma $\sum \frac{1}{n}$ è divergente. $\frac{1}{n} \gg \frac{1}{n^2}$

$$(*) = \underbrace{1}_{S_1 = 1} + \underbrace{\overset{\geq 1/4}{\frac{1}{2}} + \overset{\geq 1/4}{\frac{1}{3}}} + \underbrace{\overset{\geq 1/8}{\frac{1}{4}} + \overset{\geq 1/8}{\frac{1}{5}} + \frac{1}{6} + \overset{\geq 1/8}{\frac{1}{7}}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \overset{\geq 1/16}{\frac{1}{9}} + \dots + \frac{1}{15}} + \underbrace{\frac{1}{16} + \dots + \overset{\geq 1/32}{\frac{1}{31}}} + \dots$$

$S_1 = 1$

$S_3 = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$

$S_7 = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)$

$$(*) \geq 1 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\overbrace{\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}}^{8}\right) + \left(\frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{32}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

$= +\infty$

$$\sum \frac{1}{n} = +\infty$$

<u>Esempio</u> $\sum \frac{1}{\ln n}$

$\ln n \ll n$

$\frac{1}{\ln n} \gg \frac{1}{n}$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n} = +\infty$$

<u>Esempio</u> $\sum \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty$

Cosa succede per $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$ $\quad \| \quad \boxed{\sum \frac{1}{n^p}}$?

$\uparrow$

$p = \frac{3}{2}$ $\qquad 1 < p < 2$

Teorema (criterio di condensazione di Cauchy)

a_k decrescente

$a_k \geq 0$. La serie $\sum a_k$ ha lo stesso carattere

della serie $\sum 2^k \cdot a_{2^k}$

Esempio $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^p}$ $\qquad p \in \mathbb{R}$

(serie armonica generalizzata)

ha lo stesso carattere di $\sum 2^k \cdot \frac{1}{(2^k)^p}$

$$\frac{2^k}{(2^k)^p} = \frac{1}{2^{kp-k}} = \frac{1}{2^{k(p-1)}} = \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^k = q^k$$

$q = \frac{1}{2^{p-1}}$ $\qquad \sum q^k$ converge se $q < 1$

$q < 1 \qquad 2^{p-1} > 1 \iff p - 1 > 0$

$\Updownarrow$

$p > 1$ $\qquad \square$

Per casa:

$\frac{1}{k} \gg ? \gg \frac{1}{k^p} \quad \forall p > 1$

$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k \ln k}$ converge ?