ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 19 - 3.11.2021

$$2^{10} = 1024 \quad \text{Ki}$$

$$10^3 = 1000 \quad \text{k}$$

$$\sqrt[3]{10!} \geq 280$$

$$\log_2(100!) \geq 476$$

$$8\cdot 5\cdot 2 \leq \sqrt[3]{\underbrace{10\cdot 9\cdot 8}\,\underbrace{7\cdot 6\cdot 5}\,\underbrace{4\cdot 3\cdot 2}} \leq 10\cdot 7\cdot 4$$

280

$$\log_2(\underbrace{100\cdot 99}\cdots 2\cdot 1)$$

100 ...... 66 64 ... 33

$$\leq \log_2\Big(\underbrace{2^7\cdot 2^7\cdots 2^7}_{36}\cdot\underbrace{2^6\cdots 2^6}_{32}\cdot\underbrace{2^5\cdots}_{16}$$

$$= 36\cdot 7 + 32\cdot 6 + 16\cdot 5 + 8\cdot 4 + 4\cdot 2 + 2\cdot 1$$

$$= 252 + 192 + 80 + 32 + 8 + 2$$

$$\leq 344 + 122 + 10 = 476$$

più veloce

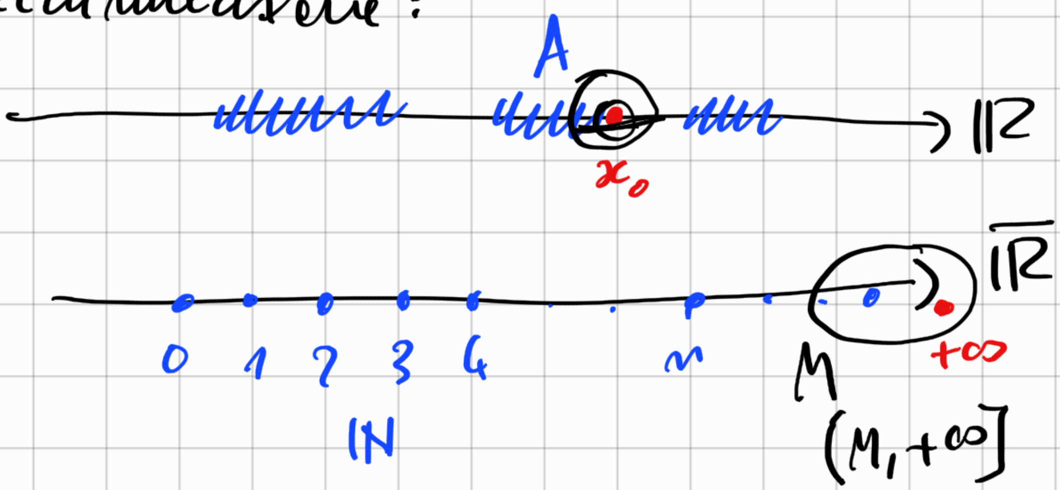
$$\log_2(100!) \leq \log_2(100^{100})$$

$$= 100 \log_2 100$$

$$= 100\cdot 2\cdot \log_2 10$$

$$\leq 100 \cdot 2 \cdot 4 = 800$$

Punti di accumulazione:

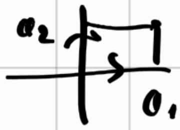


$(M, +\infty]$

$\uparrow M \in \mathbb{R}$

Unicità

$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x)}$ $\leftarrow$ ha senso solo se x_0 è pto di accumulazione per $A = \operatorname{dom} f$.



SUCCESSIONI NUMERICHE

$\vec{a}$

$\underline{a} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ $\qquad$ $\underline{a} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $\quad n \mapsto a_n$

$\underline{a} \in \mathbb{R}^2$

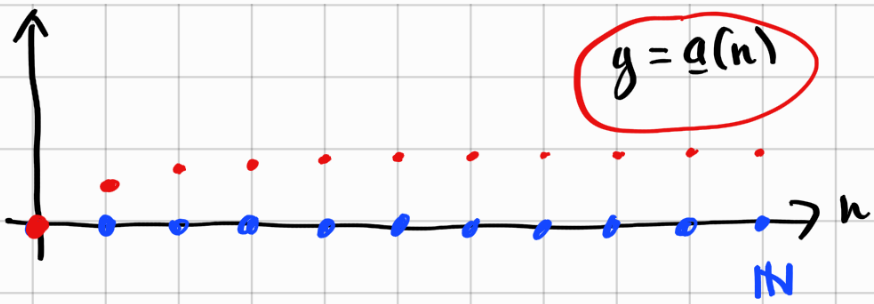
$\underline{a} = (a_1, a_2)$

$\underline{a} = \left\{ \begin{array}{l} 1 \mapsto a_1 \\ 2 \mapsto a_2 \end{array} \right\}$

Es: $\underline{a}(n) = \dfrac{n}{n+1}$ $\qquad$ $\underline{a} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $\quad n \mapsto \dfrac{n}{n+1}$

$$a_0 = \frac{0}{0+1} = 0, \quad a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{2}{3}, \quad a_3 = \frac{3}{4} \ \ldots\ldots$$

$$\underline{a} = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots \right)$$



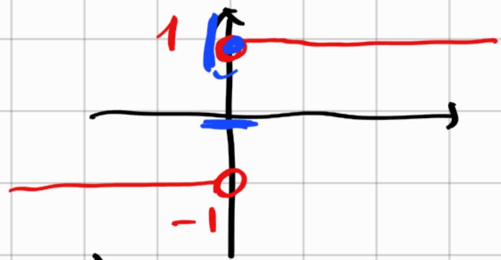
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$$

$+\infty$ è l'unico pto di acc. di $\mathbb{N}$.

$\lim a_n = 1$ $\qquad$ $a_n \to 1$ $\qquad$ sottointeso $n \to +\infty$.

⚠ I limiti in generale non esistono.

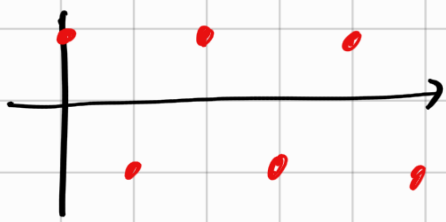
Es $\quad f(x) = \dfrac{x}{|x|} \quad (x \neq 0)$



$\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{|x|}$ non esiste $(= \nexists)$

Es $\quad a_n = (-1)^n$

$a = (1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots)$



$\lim_{n\to+\infty} (-1)^n$ non esiste

Esercizio verificare che $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ ↑

usando la definizione di limite: $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$

$$\forall \varepsilon>0 : \exists M : \underbrace{\forall n\in\mathbb{N}} : n>M \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon$$

$\in \mathbb{R}$ $\quad \geq$

$\in \mathbb{N}$

$\ell=+\infty$: $\forall \alpha$ $\qquad$ $a_n > \alpha$

$\ell=-\infty$ $\qquad$ $a_n < -\alpha$

COMPOSIZIONE DEI LIMITI

Teo (limite della fn. composta) Hyp $f(x) \neq y_0$ $\forall x \in A$.

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto y=f(x) \longmapsto g(f(x))$$

Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$ $\qquad x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$

$\lim_{y\to y_0} g(y) = \ell$ $\qquad y_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$

Allora $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = \ell$

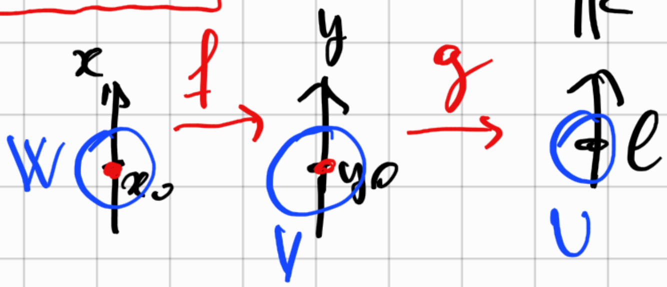
dim $g(y) \to \ell$ per $y \to y_0$: $\forall U$ intorno di ℓ $\exists V$ intorno di y_0

t.c. $g(V \setminus \{y_0\} \cap B) \subseteq U$

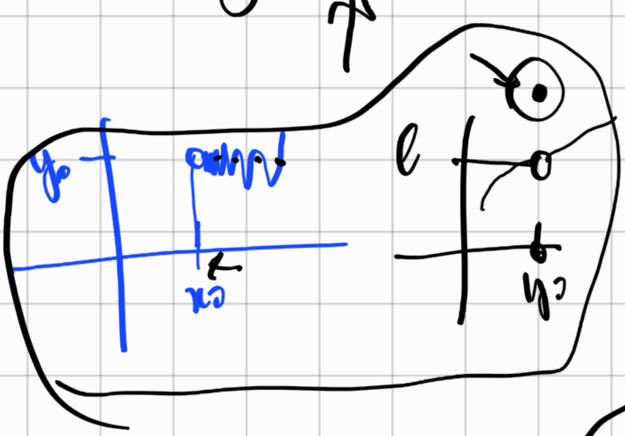
$f(x)\to y_0$ per $x\to x_0$ $\quad \forall V$ intorno di y_0 $\exists W$ intorno di x_0

$$f(W\setminus\{x_0\}\cap A)\subseteq V$$

$$g(\underbrace{f(W\setminus\{x_0\}\cap A)}) \overset{?}{\subseteq} U$$



$$g(f(W\setminus\{x_0\}\cap A))\subseteq g(V\cap B\setminus\{y_0\})\subseteq U$$



perché $f(A)\subseteq B\setminus\{y_0\}$. (*)

$\square$

ES $\quad a_n=\dfrac{n}{n+1}=\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}=\underline{g(f(n))}$

$f(n)=1+\frac{1}{n}$, $\underline{g(y)=\frac{1}{y}}$

Se $\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{1}{n}=1\\[2ex] \lim\limits_{y\to 1}\dfrac{1}{y}=1\end{cases}$ Allora $\lim\limits_{n\to+\infty} g(\underline{f(n)})=1.$

(*) $\boxed{1+\frac{1}{n}\neq 1 \quad \forall n\in\mathbb{N} \qquad \text{ok} \qquad \frac{1}{n}\neq 0.}$

Cambio di variabile

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = ? \qquad y = 1+\frac{1}{n}$$

$$n\to+\infty \Rightarrow y \to 1 \Rightarrow \frac{1}{y} \to \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \lim_{y\to 1} \frac{1}{y} = 1 .$$

<u>Oss</u> legame tra limiti e continuità.

Sia $f : A \to \mathbb{R}$.

Se $x_0 \in A$ è punto di accumulazione di A

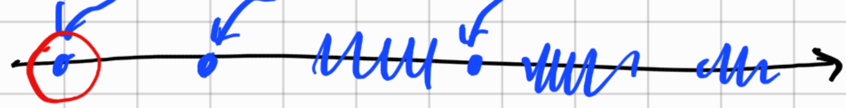
f è continua in x_0 $\Leftrightarrow$ $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

è la nostra definizione

Se $x_0 \in A$ <u>non</u> è punto di accumulazione di A

f è sempre continua in x_0

ovvero x_0 è un punto isolato di A



[Fondamentalmente $f(x) \to f(x_0)$ per $x \to x_0$
anche se x_0 è isolato]

Es

$$\lim_{x \to \sqrt{2}} 2^x = 2^{\sqrt{2}}$$

in quanto 2^x è continua.

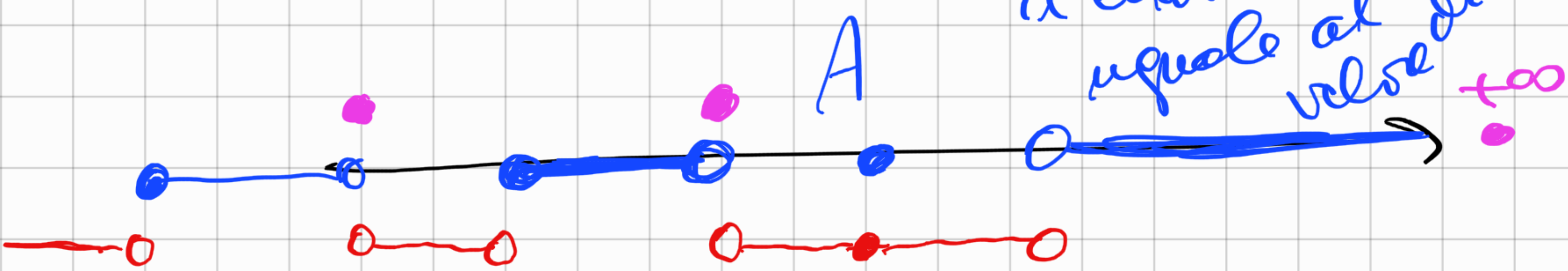
Es

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{\ln_3\left(x+\frac{1}{x}\right)}}{2^{x+1}} = \frac{\sqrt{\ln_3\left(4+\frac{1}{4}\right)}}{2^{4+1}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\ln_3(4.25)}}{2^5}$$

(x f continua)

il limite è uguale al valore di f



punti non di acc.

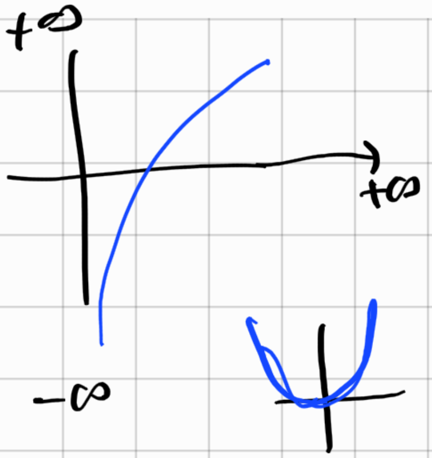
non ha senso fare il limite

Nei punti viola il limite non è ovvio.

Es

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \sup\left\{\frac{1}{x} : x > 0\right\}$$

$$= \sup(0, +\infty) = +\infty.$$

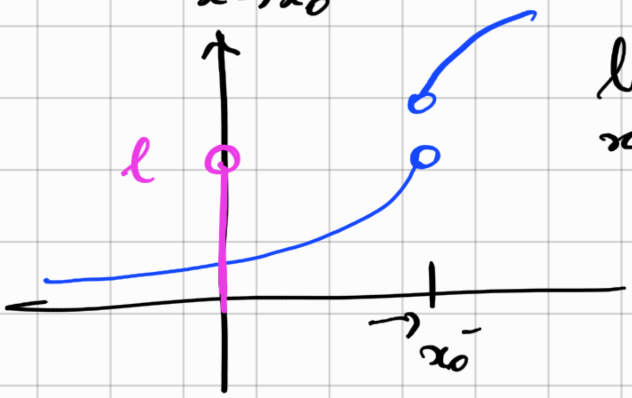


ES $\lim_{x\to 0^+} \ln_3 x = \inf \mathbb{R} = -\infty$

ES $\lim_{x\to +\infty} x^2 = \sup_{x>0} x^2 = +\infty$

Teo f crescente:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \sup\{f(x) : x < x_0\}$$



$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \sup f$$

□