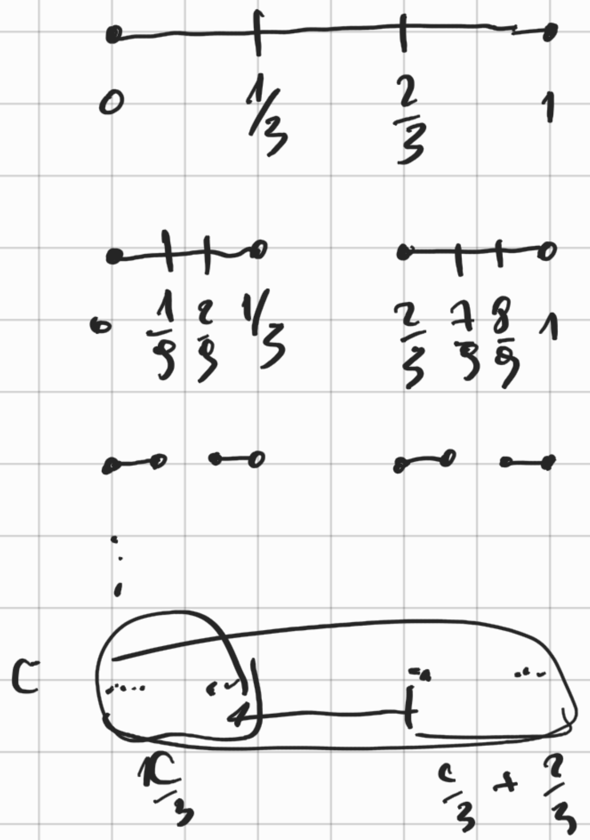
ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 14 - 20.10.2021



$$C = \frac{C}{3} \cup \left(\frac{C}{3} + \frac{2}{3}\right)$$

A, B gruppi totalmente ordinati, densi, continui

Fissato $u \in A$, $u > e_A$ e $m \in B$, $m > e_B$ $\exists!\ f : A \to B$

(i) $f(u) = m$

(ii) $f(x *_A y) = f(x) *_B f(y)$ (omomorfismo)

(iii) crescente

$$\begin{array}{ccc} + & & \cdot \\ \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & a^x \end{array}$$

$a > 1$ (i) $a^1 = a$

(ii) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

(iii) $x \to a^x$ crescente.

Def (monotonia) $\quad f: A \to B \quad (A \subseteq \mathbb{R},\ B = \mathbb{R})$

(debolmente)

Diremo che f è crescente se $\quad \forall x, y \in A$

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

f è strett. crescente se

$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

f è decrescente

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$$

f è strettamente decrescente

$$x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$$

f è costante

$$(x < y) \Rightarrow f(x) = f(y)$$

ovvero f è crescente $\wedge$ decrescente

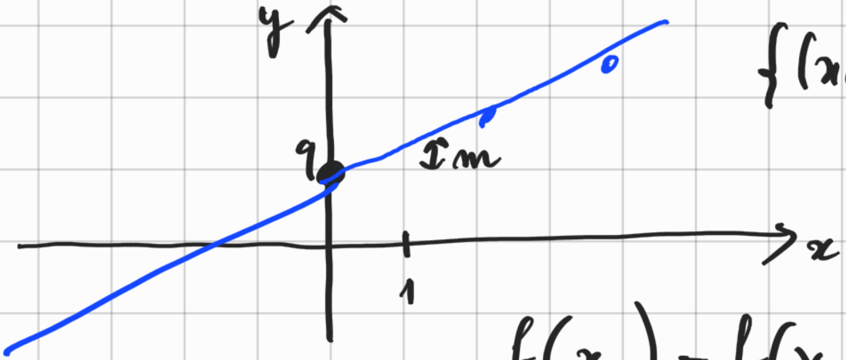
f è monotòna se è crescente $\vee$ decrescente

f è strettamente monotòna se è strettamente crescente o strettamente decrescente.

FUNZIONI LINEARI

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f(x) = \overset{\text{pendenza}}{m}x + \overset{\text{intercetta}}{q}$$



$\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} : y=f(x)\}$

$$f(x_2)-f(x_1)=m(x_2-x_1)$$

$$\Delta f(x) = m\cdot\Delta x$$

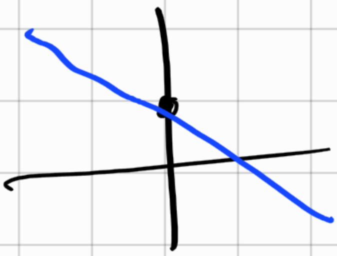
$m=\frac{30}{100}$

$$m=\frac{\Delta f}{\Delta x}$$

se $m>0$ f è strett. crescente

se $m<0$ f è strett. decresc.

se $m=0$ f è costante

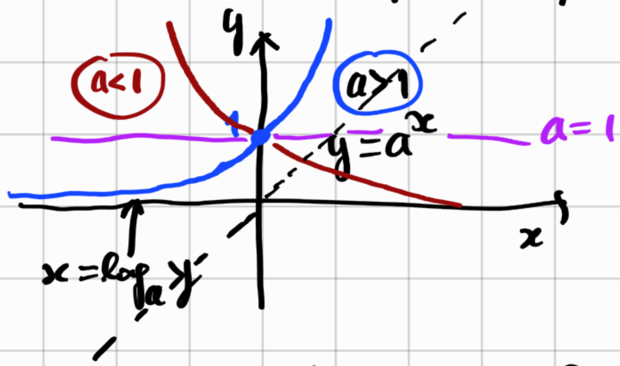


Se $q=0$ si dice che f è lineare omogenea. $f(0)=0$

$$f(x+y)=f(x)+f(y), \quad f(t\cdot x)=t\cdot f(x)$$

Esponenziale / potenza. $a^{-1}\cdot a^{1} = a^{1-1} = 1$

a^x è definito per $a>1$, $x\in\mathbb{R}$ $\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$



$a<1$ $\left(a^{-1}\right)^x$

$a=1$ $1^x = 1$.

Come si dimostrano: ① $(a^x)^y = \underline{a^{x\cdot y}}$ ② $(a\cdot b)^x = a^x\cdot b^x$

① $(a>1)$ $f(y) = a^{x\cdot y}$ $f(y+z) = a^{x\cdot(y+z)}$

$= a^{xy+xz} = a^{xy}\cdot a^{xz}$

$f(1) = a^x$ $= f(y)\cdot f(z)$.

per l'unicità $f(y) = (a^x)^y$

② ....

LOGARITMO

$f(x) = a^x$

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ è bigettiva.

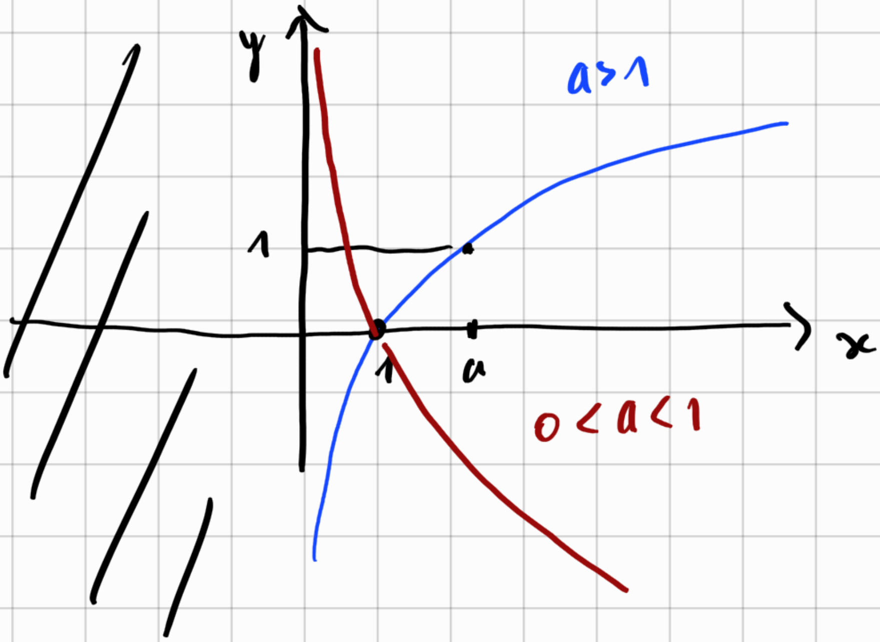
$f^{-1}:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$

$x\longmapsto \log_a x$ $a^0=1$

(·) $\log_a(x\cdot y) = \log_a x + \log_a y$ $\log_a 1 = 0$

(··) $\log_a(x^y) = y\cdot\log_a(x)$ $\log_a a = 1$

(···) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$



$a \neq 1$
$a > 0$

POTENZE

$x \mapsto x^\alpha$ si chiama potenza

per ora è definita se $x > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

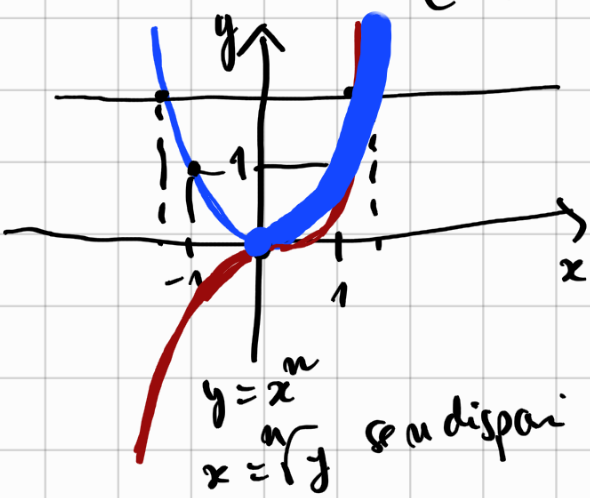
$$x^n = x^{\overbrace{1+1+\dots+1}^{n}} = \underbrace{x^1 \cdot x^1 \dots x}_{n} = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ - volte}}$$

Se $n \in \mathbb{N}$ x^n è definita $\forall x \in \mathbb{R}$ (anche $x \leq 0$)

se $x \geq 0$ $\quad (-x)^n = \begin{cases} x^n & n \text{ pari} \\ -x^n & n \text{ dispari} \end{cases}$

pari: $f(-x) = f(x)$

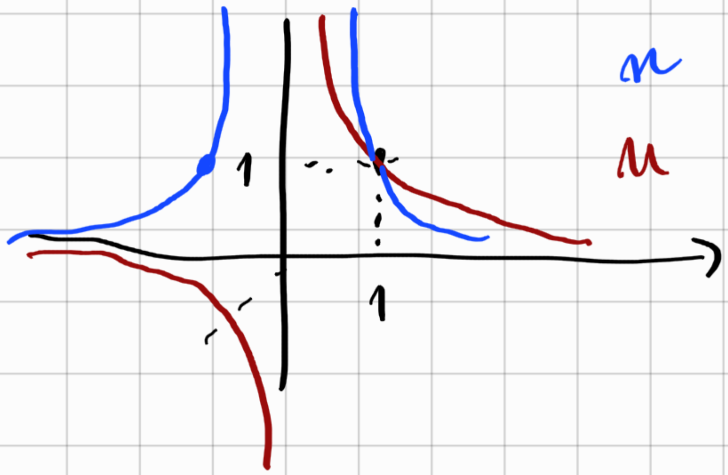
dispari: $f(-x) = -f(x)$



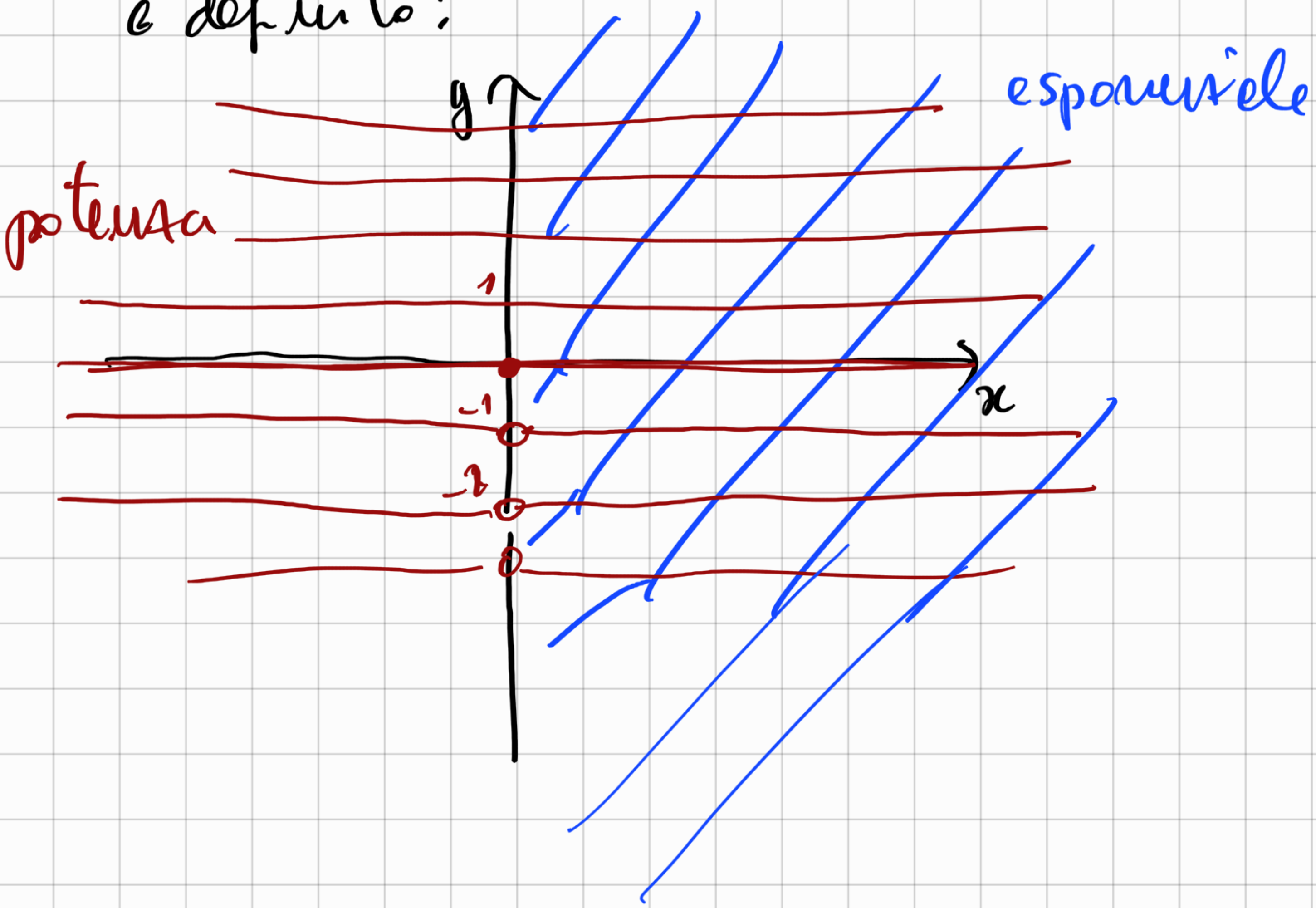
se $x > 0$, $\alpha > 0$
allora
$f(x) = x^\alpha$
è strett. crescente

Se $\alpha \in \mathbb{Z}$ $\quad x^\alpha = ?$ $\qquad \alpha = -n,\ n \in \mathbb{N}$

$n \in \mathbb{N} \qquad x^{-n} \doteq \frac{1}{x^n} \qquad x \neq 0$



Nel complesso quand'è che x^y è definito?



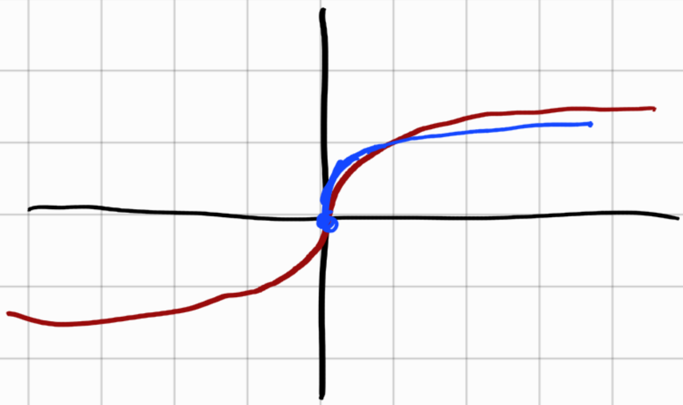
RADICI n-esime $\quad n \in \mathbb{N}, n \neq 0$

x^n è strettamente crescente per $x > 0$

$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x^{\frac{1}{n} \cdot n} = x^1 = x$$

$$\boxed{y^n = x}$$

$$y = \sqrt[n]{x} = \begin{cases} x^{1/n} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ (-x)^{1/n} & \text{se } x < 0 \text{ e } n \text{ dispari} \\ \text{non def.} & \text{se } x < 0 \text{ e } n \text{ pari.} \end{cases}$$



$\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$ $\qquad$ Attenzione $\qquad \boxed{\sqrt{x^2} = x \text{ solo se } x \geq 0}$

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$= |x|$ valore assoluto

$|x| \geq 0$