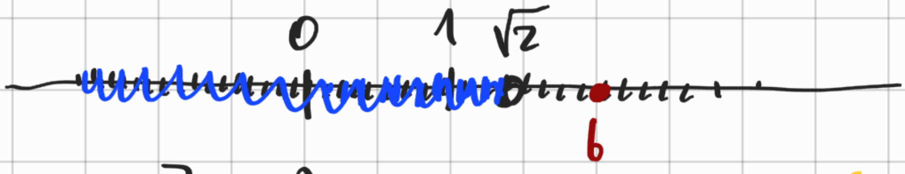
ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 12 — 15.10.2021

$\mathbb{Q}$

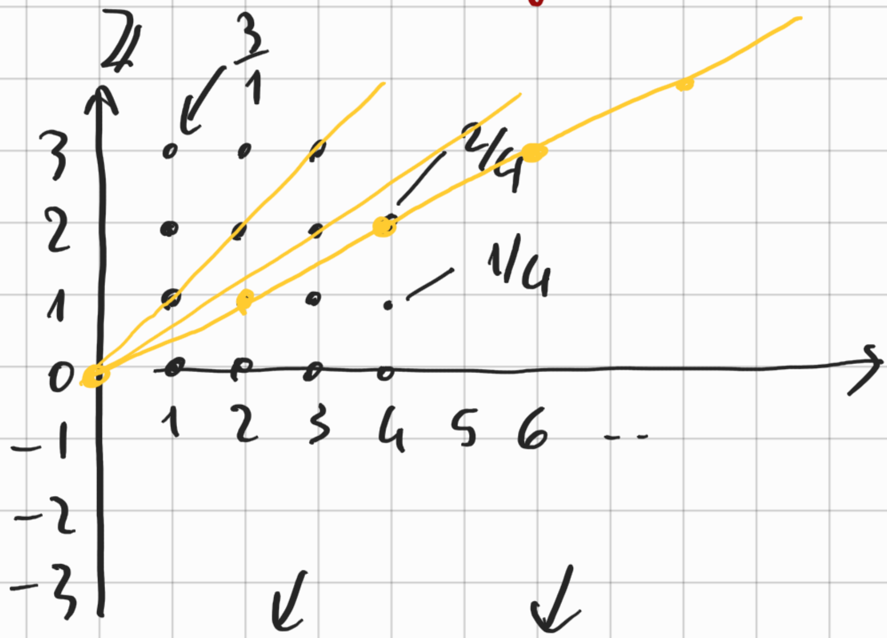


$\mathbb{N}_+ \times \mathbb{Z}$

(q,p)

$\updownarrow$

$\frac{p}{q}$



$\subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Q})$

$\mathcal{R} = \{ A \subseteq \mathbb{Q} : A \neq \emptyset,\ A$ superiormente limitato$\}$

Es 1 $A = \{ 1, \frac{14}{10}, \frac{141}{100}, \frac{14142}{1000}, \dots \}$

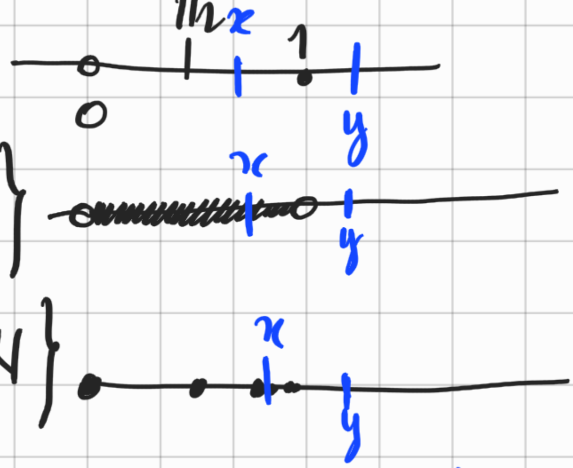
$B = \{ x \in \mathbb{Q} : x \geq 0,\ x^2 < 2 \}$

Es 2

$A = \{1\}$

$B = \{ x \in \mathbb{Q} : 0 < x < 1 \}$

$C = \{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \}$



se $y \geq 1$ è maggiorante

se $x < 1$ non è maggiorante

Relazione di equivalenza

def: $A \sim B$ se $\forall y \in \mathbb{Q} : \ y \geq A \iff y \geq B$

$\mathbb{R} = \underbrace{R/_{\sim}}$

$\mathbb{R} \supseteq \mathbb{Q}$

$\mathbb{R} \neq \mathbb{Q}.$

<u>ES</u> $7.322235\ldots\ldots \in \mathbb{R}$

$$\left\{7, \frac{73}{10}, \frac{732}{100}, \frac{73223}{1000}, \ldots\right\}$$

Data $\underline{a} \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}^{\mathbb{N}} = D^{\mathbb{N}}$

$a_n \in D \quad \forall n.$

$$A = \{ \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k}} : n \in \mathbb{N} \} \qquad A \in R$$

$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$

$[A]_{\sim} \in \mathbb{R}$

<u>ES</u> $a_n = 6 \quad \forall n \qquad 0.6666\ldots$

$$A = \left\{ \frac{6}{10}, \frac{66}{100}, \frac{666}{1000}, \ldots \right\}$$

$A \sim \{\frac{2}{3}\}$

$0,666\ldots$

$= 0.\overline{6} \in \mathbb{Q}$

<u>ES</u> $\underbrace{0,99\overline{9}} = 1.$

Es $x = 0,1\overline{23}$ $\qquad 0,\underbrace{1}\underbrace{23}\underbrace{23}\underbrace{23}\underbrace{23}$

$x = 0,1\overline{23} = 0,123\overline{23}$

$100 \cdot x = 12,3\overline{23}$

$100x - x = \frac{122}{10}$

$$\begin{array}{r} 12,3\overline{23} \; - \\ 0,1\overline{23} \; = \\ \hline 12,2 \end{array}$$

$99x = \frac{122}{10} \qquad x = \frac{122}{990}.$

Es $\frac{2}{7}$

$2:7 = 0,\overline{285714}$

$$\begin{array}{l} 20 \\ \;\;60 \\ \;\;\;\;40 \\ \;\;\;\;\;\;50 \\ \;\;\;\;\;\;\;\;10 \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;30 \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;20 \end{array}$$

$+$ su $\mathbb{R}$?

Queste definizioni "passano al quoziente"

$A \sim A' \quad B \sim B'$

$A + B \sim A' + B'$

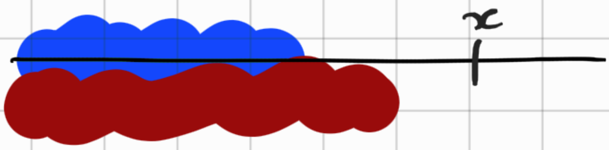
$+$ su $\mathbb{R}$

$A + B = \{a+b : a \in A, b \in B\}$

$\cdot$ su $\mathbb{R}_+$

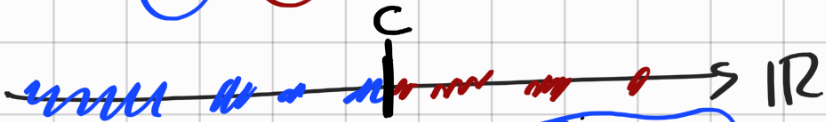
$\leq$ su $\mathbb{R}$

$A \leq B \overset{\text{def}}{\iff} x \geq B \Rightarrow x \geq A$



$\mathbb{R}$ è continuo (Dedekind completo)

Def Se $A, B \subseteq \mathbb{R}$ $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$ $A \le B$
$(\forall a \in A, \forall b \in B : a \le b)$



$\exists c \in \mathbb{R}$: $\boxed{A \le c} \le B$

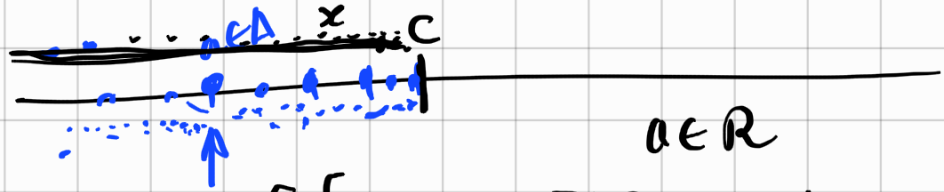
diremo che $\mathbb{R}$ è continuo.

Teo $\mathbb{R}$ è continuo.

dim Dati A, B come sopra dobbiamo trovare $c \in \mathbb{R}$.

Gli elementi di A sono classi di equivalenza di elementi di $\mathbb{Q}$ cioè sottoinsiemi di $\mathbb{Q}$

$$c = \left[\bigcup\{\alpha : [\alpha] \in A\}\right]_\sim$$



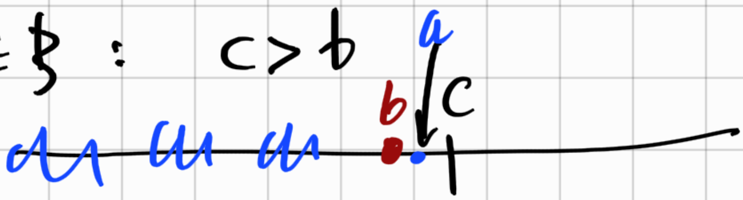
$a \in \mathbb{R}$

$$c = \left[\{x \in \mathbb{Q} : \exists [a]_\sim \in A\ \exists y \in a : x \le y\}\right]_\sim$$

$c \ge A$ per definizione. $c \le B$? $\Leftarrow \forall b \in B : c \le b$

Per assurdo se non fosse $c \le B$ $\wedge$

$\exists b \in B : c > b$



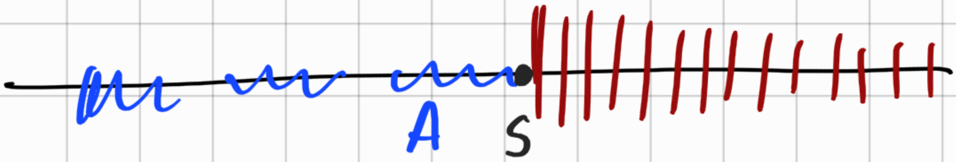
Ma esiste $a \in A$: $b < a \le c$

perché c è il minimo dei maggioranti di A.

$$A \ni a > b \in B \qquad \square$$

Def Dato $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$, A superiormente limitato
dato $s \in X$
diremo che s è <u>estremo superiore</u> di A
se s è il minimo dei maggioranti di A:

$$s = \min \{ x \in X : x \geq A \}$$



Se X è continuo s esiste, <u>è unico</u> e
si denota con $s = \sup A$.

dim (se $X = \mathbb{R}$ $s = c$ di prima)

in generale sia X continuo.

$$B = \{ y \in X : y \geq A \} = \{ \text{maggioranti di } A \}$$

$\exists c \in X$ $\quad A \leq c \leq B$

c è maggiorante di A $\Rightarrow c \in B$

c è un minorante di B $\Rightarrow c \leq B$

$c = \min B$ $\square$

Se $\sim$ è una relazione di equivalenza su -

$$A/_\sim = \mathcal{A} = \{[x]_\sim : x \in A\}$$

$$[x]_\sim = \{y \in A : y \sim x\}$$

Es $A = \mathbb{Z}$, $x \sim y$ se $x-y$ è pari.

$$[7]_\sim = \{1, -1, 3, -3, 5, -5, \dots\}$$

$$= \{\text{dispari}\} = D$$

$$[42]_\sim = \{\text{pari}\} = P$$

$$\mathbb{Z} = P \cup D \qquad P \cap D = \emptyset$$

$$\mathbb{Z}/_\sim = \{P, D\} \qquad P = [0]_\sim \quad D = [1]_\sim$$

"$\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} = \{0, 1\}$"

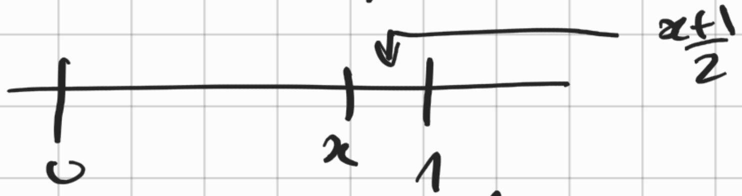
$\mathbb{R}$ è un campo totalmente ordinato, continuo.

Oss $\quad \sup A \in A \iff \sup A = \max A$.

Es $\quad \sup \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$

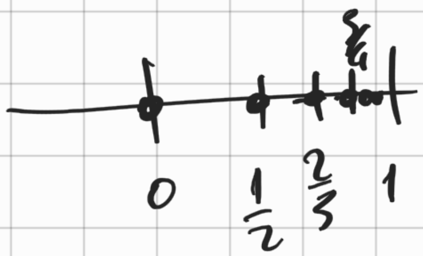
$A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$

$B = \{\text{maggioranti di } A\} = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 1\}$



$\min B = 1 \qquad 1 = \sup A$.

Es $\quad A = \left\{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$



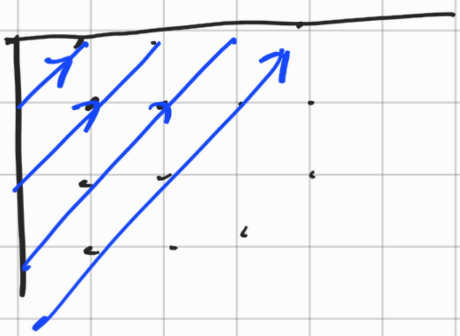
$\sup A = 1$.

$\#\mathbb{N} = \#\mathbb{Q} < \#\mathbb{R}$

$\| \; \#(\mathbb{N} \times \mathbb{Z})$

$0, 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \dots$

$(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$



0	2	5	9
1	4	8	13
3	7	12	
6	11		
10			

Teo $\# \mathbb{R} > \# \mathbb{Q}$ $\quad \# \mathbb{R} \geq \# \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\} = [0,1]$

dim

per assurdo $[0,1]$ sia numerabile

$n=0$ $\quad 0,174235\ldots$ $\qquad 0,7777$

$0,41423\ldots$

$0,1415926\ldots$ $\qquad$ cifre diverse

$0,12345432$ $\qquad$ non sta nell'elenco.

$0,33333$

$0,500000$