ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 11 — 13.10.2021

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \forall k} \qquad 0 \le k \le n$$

$$\xrightarrow{\text{def.}} (1+x)^n =: \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

dimostrato

$$\longrightarrow \binom{n+1}{k} \overset{(*)}{=} \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

(i) $$\binom{0}{0} = 1 = \frac{0!}{0!(0-0)!} \qquad (1+x)^0 = 1 \cdot x^0$$

ipotesi induttiva

(ii) $$\binom{n+1}{k} \overset{(*)}{=} \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}$$

$$= \frac{n!(n-k+1) + n! \cdot k}{k!(n-k+1)!}$$

$$= \frac{n!(n+1)}{k!(n+1-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}$$

$\square$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

ES $$\binom{4}{3} = \frac{4 \cdot \cancel{3 \cdot 2 \cdot 1}}{\cancel{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 1} = 4$$

$$\binom{n}{n-1} = n = \binom{n}{1}$$

ES $$\binom{10}{8} = \frac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}{\cancel{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \quad 2 \cdot 1} = 45$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1)(n-2) \cdots (k+1)}{(n-k)!}$$

$$= \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}$$

Interpretazione combinatoria

$$(1+x)^n = \cdots + \binom{n}{k} x^k + \cdots$$

$$\| $$

$$\underbrace{(1+x)\cdot(1+x) \cdots \cdot(1+x)}_{n \text{ volte}}$$

$$(1+x)^3 = (1+x)(1+x)(1+x) \qquad \binom{3}{2} = ?$$

$$= \cdots + 3\, x^2 + \cdots$$

$\binom{n}{k}$ = # sottoinsiemi di k elementi in un insieme di n elementi.

$= C_{n,k}$ combinazioni

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k(k-1) \cdot \ldots \cdot} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \quad \square$$

$\mathbb{N}$ 0, + commutativa, distributiva, $\leq$

$\mathbb{Z}$ 0, +, $\leq$, opposto, $\cdot$, 1 . Anello

$\mathbb{Q}$ inverso moltiplicativo, distributiva
Campo.

associativo: $(x*y)*z = x*(y*z)$

<u>def</u> Gruppo. Una operazione $*$, elemento neutro
$e * x = x = x * e$
c'è l'inverso $\forall x \; \exists y : x * y = e = y * x$
Se $*$ è commutativa: gruppo commutativo
o abeliano.

<u>def</u> Anello. + e $\cdot$ + gruppo additivo commutativo
tolto 0 è un gruppo moltiplicativo.
$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

<u>def</u> campo. è un anello la moltiplicazione
ha inverso (tranne 0)
ed è commutativa.

<u>Equazioni lineari:</u>

$$\boxed{m \cdot x + q = 0} \qquad m \in \mathbb{Q},\; m \neq 0,\; q \in \mathbb{Q}$$

$f(x) = mx + q$

$g(x) = m\cdot x \qquad h(y) = y+q$

$f = h\circ g \qquad f^{-1} = g^{-1}\circ h^{-1}$

$x \xmapsto{g} m\cdot x$

$\xleftarrow[g^{-1}]{} \; y \xmapsto{h} y+q \overset{?}{=} 0$

$\xleftarrow[h^{-1}]{}$

$mx = -q$

$x = -\frac{q}{m}$.

<u>Teor</u> (Pitagora) $x^2 = 2$ non ha soluzioni in $\mathbb{Q}$.

($\sqrt{2}$ è irrazionale)

[$h(g(f(x)))$ $\qquad \sqrt{2+\sin\left(\frac{x+1}{3}\right)} = 7$

$2^x = x^3$]

<u>dim</u> per assurdo

$\exists x\in\mathbb{Q}: x^2 = 2$, $x>0$

$x = \frac{p}{q} \qquad p\in\mathbb{N}, q\in\mathbb{N}$.

frazione ridotta ai minimi termini.

$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \qquad p^2 = 2\cdot q^2$

p^2 è pari $\Rightarrow$ p è pari

$\qquad\qquad\qquad\qquad \parallel$

$\qquad\qquad\qquad p = 2k$

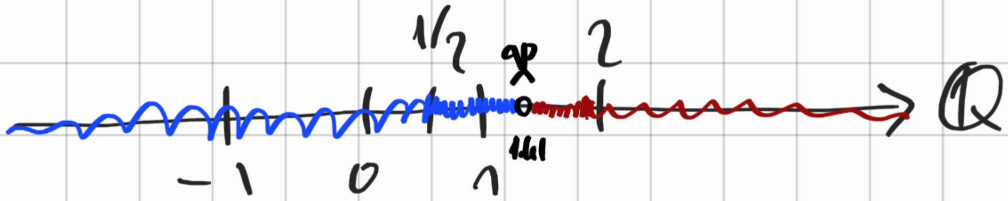
$\qquad\qquad\qquad p^2 = 4\cdot k^2 = 2\cdot q^2$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 2\cdot k^2 = q^2$

q^2 è pari $\Rightarrow$ q è pari. assurdo $\boxtimes$.

$(2k+1)^2 = \underbrace{\underbrace{4k^2+4k}_{\text{pari}}+1}_{\text{dispari}}$

Numeri reali : $\mathbb{R}$



$A = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0,\ x^2 < 2\} \cup \{x < 0\}$

$0 \in A,\ 1 \in A,\ \frac{14}{10},\ \frac{141}{100} \in A$

$\begin{cases} A \cap B = \emptyset \\ A \cup B = \mathbb{Q} \end{cases}$

$B = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0,\ x^2 > 2\}$

$2 \in B,\ 1.5 \in B,\ 1.42 \in B$

A e B sono adiacenti, ma manca un elemento di separazione

Def (continuità o completezza di Dedekind)

Sia X un insieme totalmente ordinato.

Diremo che X è **continuo** se

Presi $A, B \subseteq X$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, tali che

$\forall a \in A, \forall b \in B: \quad a \leq b.$

Allora esiste c: $\forall a \in A, \forall b \in B: \quad a \leq c \wedge c \leq b$

$\mathbb{Q}$ non è continuo.

Def X con una relazione $\leq$ diremo che è <u>ordinato</u> se:

(i) $x \leq x$ (riflessiva)

(ii) $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (transitiva)

(iii) $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$

diremo che l'ordine è totale (o lineare) se

$\rightarrow$ (iv) $x \leq y \vee y \leq x$.

Completamento di $\mathbb{Q}$ per ottenere $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{R} = \{ A \in \mathcal{P}(\mathbb{Q}) : A \neq \emptyset, A \text{ superiormente limitato} \}$$

def $A \subseteq X$, X insieme ordinato
diremo che $x \in X$ è un **maggiorante** di A
se $\forall a \in A: a \leq x$. Possiamo scrivere $A \leq x$.

se x è un maggiorante e $x \in A$
diremo che x è il **massimo** di A

diremo che A è **superiormente limitato**
se esiste un maggiorante di A.

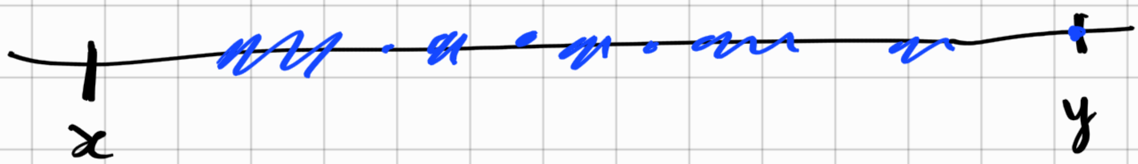
$$\exists x : A \leq x.$$

diremo che A è **inferiormente limitato**

se $\exists x : \quad x \leq A$

x è un **minorante**

diremo che A è **limitato** se è
sia superiormente che inferiormente limitato



Es 1 $\quad A = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}$

0 è un minorante $\qquad 0 \leq A$

0 non è minimo perché $\; 0 \notin A$.

Es 2 $\quad A = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x < 1\}$

A ha minimo: $\; 0 \in A$ è minimo
A non ha massimo

$0 = \min A$.

$\max A$ non esiste

A è limitato