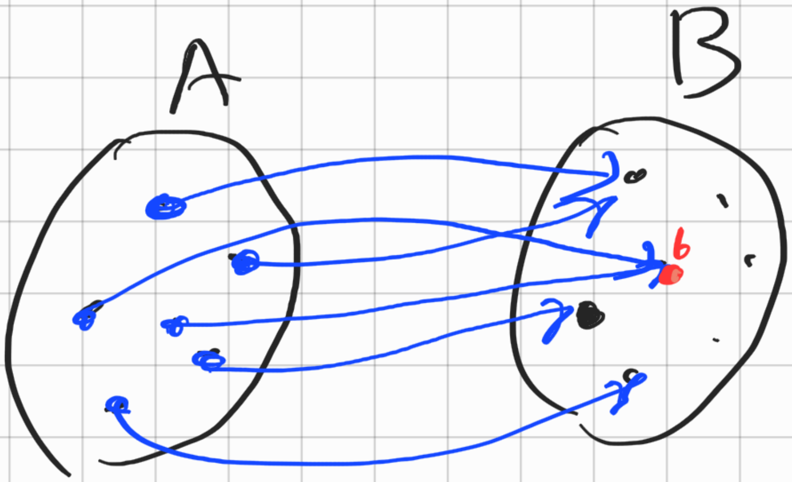
ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 7 – 4.10.2021

FUNZIONE



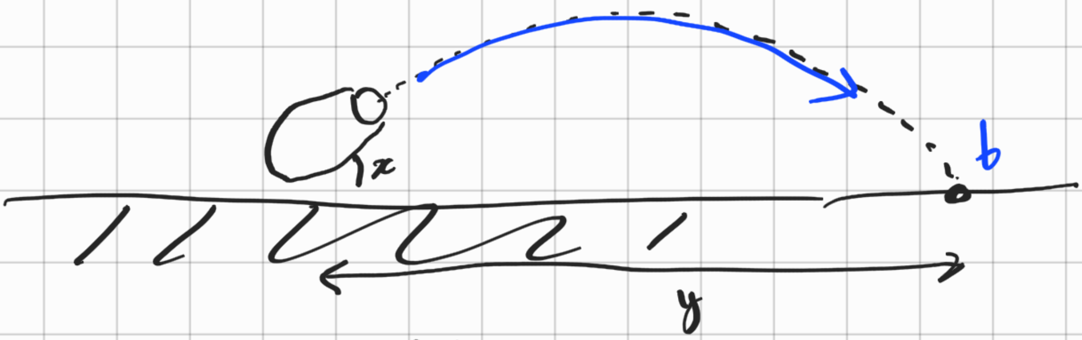
$$f : A \to B$$
$$x \mapsto f(x)$$

$$\forall x \in A \ \exists!\, y \in B$$

$$y = f(x)$$

$$a \in A$$

$$b = f(a) \in B$$



$$y = f(x)$$

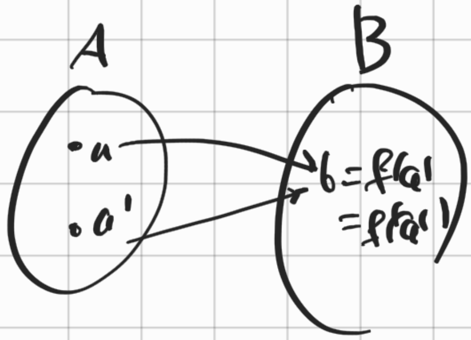
Mi chiedo: conoscendo b qual è x tale che $b = f(x)$.

Risolvere l'equazione:

$$f(x) = b$$

f è <u>surgettiva</u> (<u>suriettiva</u>)

$$\forall b \in B \; \exists \, a \in A : \; f(a) = b$$



f è <u>iniettiva</u>

$$\forall a \in A : \forall a' \in A : \; f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$$

f è <u>bigettiva</u> (biettiva) se è iniettiva e suriettiva.

$$\forall b \in B \; \exists ! \, a \in A : \; f(a) = b$$

<u>Oss</u> f è bigettiva $\Leftrightarrow$ la relazione inversa di f è una funzione.

Se f è <u>bigettiva</u> diremo che f è <u>invertibile</u> in quanto esiste:

$$f^{-1} : B \to A$$
$$b \mapsto a$$

a è l'unico $a \in A$ t.c. $f(a) = b$.

Quindi se f è invertibile

$$f^{-1}(f(a)) = a \quad (1)$$

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{f^{-1}} & A \\ a & \longmapsto & f(a) & \longmapsto & a \end{array}$$

$$\Updownarrow$$

$$f(f^{-1}(b)) = b \quad (2)$$

$$\begin{array}{ccccc} B & \xrightarrow{f^{-1}} & A & \xrightarrow{f} & B \\ b & \longmapsto & a & \longmapsto & b \\ & & \shortparallel & & \\ & & f^{-1}(b) & & \end{array}$$

Esercizio Se f è iniettiva restringendo B trovo $f: A \to B' \subseteq B$ anche suriettiva

$f^{-1}: B' \to A$ è definita univocamente.

e soddisfa (1)

$f: A \to B$

$g: B \to C$

COMPOSIZIONE

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, mapsto] \arrow[rr, bend right] & f(a) \arrow[r, mapsto] & g(f(a)) \end{tikzcd}$$

$g \circ f = \{(a,c) \in A \times C : \exists b \in B : (a,b) \in f, (b,c) \in g\}$

definisco $g \circ f : A \to C$

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)).$$

Se f invertibile: $\quad f^{-1}\circ f = id_A$

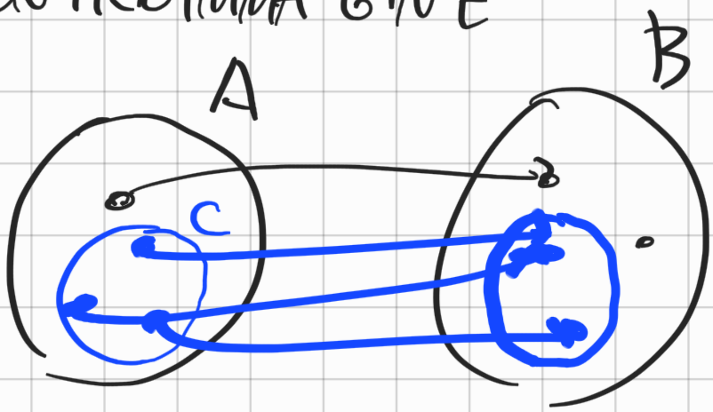
$$id_X : X \to X \qquad f\circ f^{-1} = id_B$$
$$x \mapsto x$$

IMMAGINE / CONTROIMMAGINE

Dato $C \subseteq A$ $\quad f: A \to B$

definiamo

l'<u>immagine</u> di C:



$$f(C) = \{ b \in B : \exists a \in C : f(a) = b \}$$

La funzione $\quad f_{|C} : C \to B$
$$a \mapsto f(a)$$

si chiama <u>restrizione</u> di f su C.

<u>Definisco</u> l'immagine di f

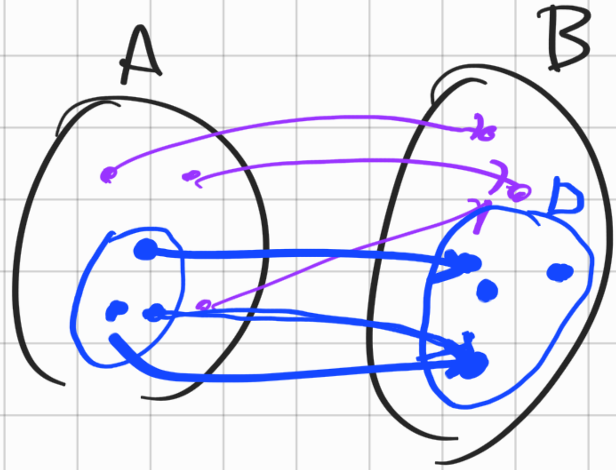
$$\mathrm{Im}\, f = f(A)$$

è l'immagine di tutto il dominio.

<u>Oss</u> $\quad f$ è suriettiva $\iff f(A) = B$

$f: A \to B$ $\quad$ ovvero $\mathrm{Im}\, f = B$.

Se $D \subseteq B$ $\quad f: A \to B$



La <u>controimmagine</u> di D

è

$$f^{-1}(D) = \{a \in A : f(a) \in D\}$$

[non è la funzione inversa]

<u>Oss</u> f è <u>iniettiva</u> $\iff \forall b \in \mathrm{Im}\, f$ $\quad f^{-1}(\{b\})$ ha un solo elemento

In generale

$\forall b \in B$: $\quad f^{-1}(\{b\})$ ha almeno un punto $\iff f$ suriettiva

$\quad$ '' $\quad$ '' $\quad$ ha al più un punto $\iff f$ iniettiva

$\quad$ ha esattamente un punto $\iff f$ biiettiva.

Dal punto di vista delle equazioni:

$$b = f(x)$$

se f invertibile c'è una unica soluzione:

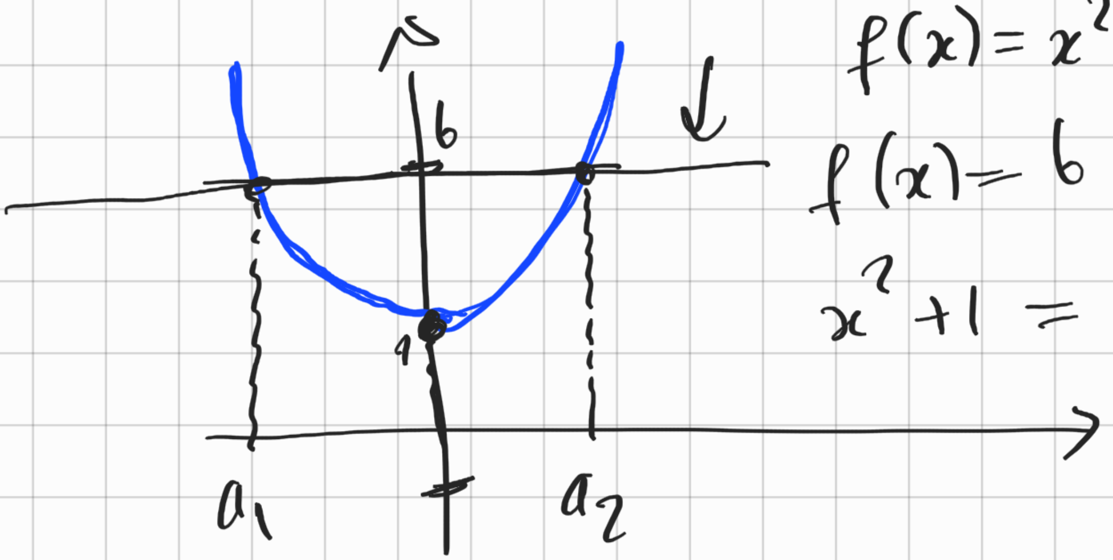
$$x = f^{-1}(b)$$

in generale l'insieme di tutte le soluzioni

è

$$f^{-1}(\{b\}) = \{x \in A : f(x) = b\}$$

ES



$f(x)=x^2+1$

$f(x)=6$

$x^2+1=6$

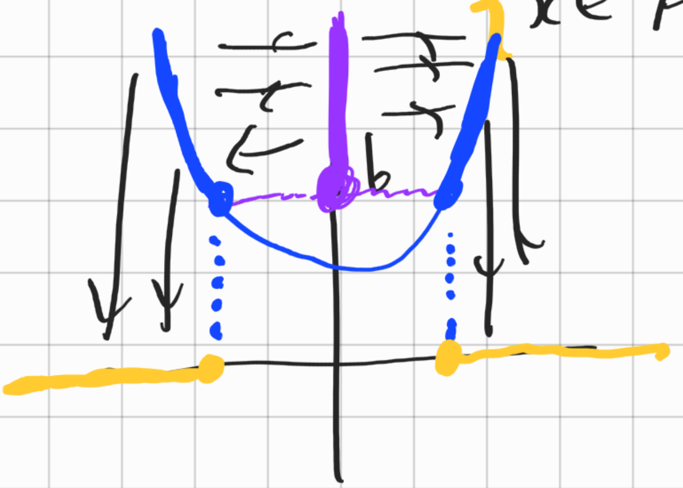
ES

$f(x)=x^2+1 \geq 6$

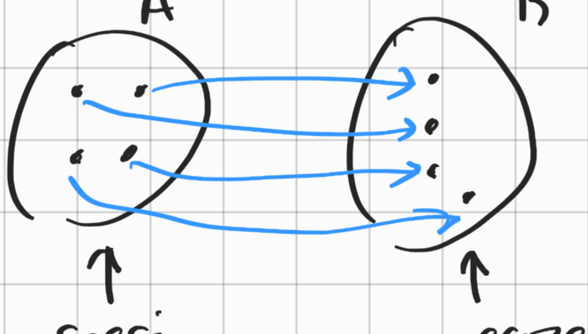
le soluzioni sono: $f^{-1}(\{y\in B : y \geq 6\})$

$$\parallel$$

$\{x \in A : f(x) \geq 6\}$



CARDINALITA'



Se esiste $f: A \to B$ bigettiva diremo che A e B sono "equipotenti"

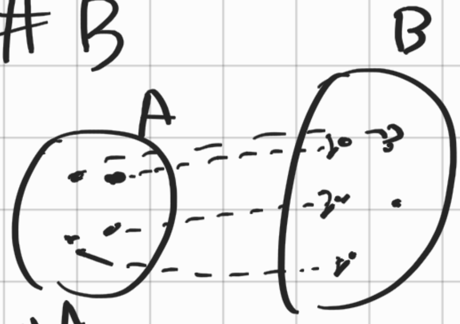
(1) e scriviamo $\#A = \#B$

A è in corrispondenza biunivoca con B
(biiettiva).

---

(2) analogamente $\#A \le \#B$

se esiste $f: A \to B$
iniettiva



(3) $\#A \ge \#B$ $\Leftarrow$ $\#B \le \#A$ AC (assioma della scelta)

se esiste $f: A \to B$ suriettiva.

(4) $$\#A < \#B \iff \begin{cases} \#A \le \#B \\ \text{ma non } \#A = \#B \end{cases}$$

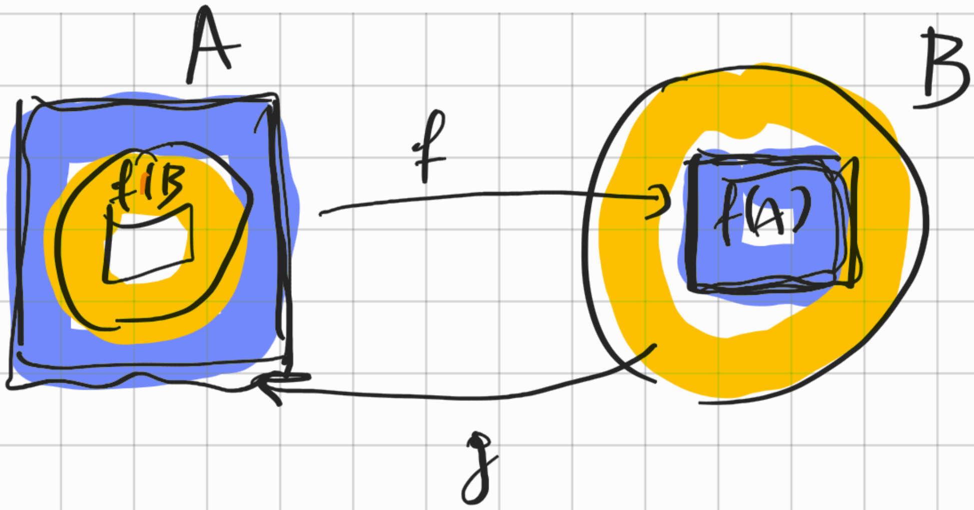
Teorema (Cantor-Bernstein)

$$\#A \le \#B \text{ e } \#B \le \#A$$

$$\Rightarrow \#A = \#B.$$

dim $f: A \to B$ iniettiva

$g: B \to A$ iniettiva



[Teorema $\quad \#A \le \#B \ \lor \ \#B \le \#A$]

Es **Hotel Hilbert** (paradosso dell'infinito / paradosso di Galileo)

$\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, 4, \dots \}$

def A è infinito se (definiz Hotel)

$\exists f : A \to A$ iniettiva ma non suriettiva.

Es $\mathbb{N}$

$f(n) = n+1$

$g(n) = 2n$