ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 3 - 22.9.2021

Sistema formale:

SIMBOLI: $\forall, \alpha, x, 0, +, \dots$

FORMULE: $\alpha x + \forall$

FORMULE BEN FORMATE: $x + 0 = \alpha$

TEOREMI:
- ASSIOMI
  - es. $\exists A : \neg \exists x \in A$
- REGOLE DI INFERENZA
  - es: $\dfrac{P \Rightarrow Q \quad P}{Q}$ MODUS PONENS

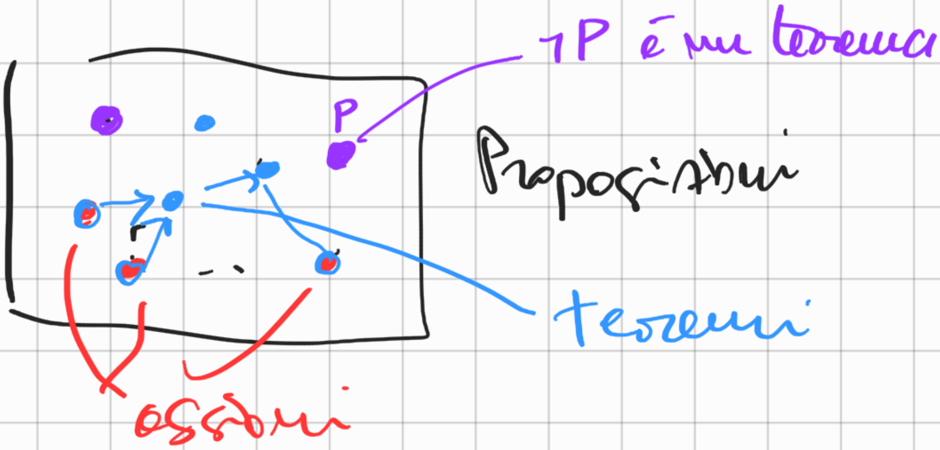
es: $\dfrac{P}{P \vee Q}$

es: $\dfrac{P \quad Q}{P \wedge Q}$

Proposizioni: formule interpretabili come vere o false.

es: $2+2=5$

Se reputiamo VERI gli assiomi e se reputiamo che le regole di inferenza mantengano la verità tutti i teoremi sono VERI.



Negazione logica: $\neg P$

Per dimostrare che P è false bisogna dimostrare $\neg P$

(1931)

<u>Teorema di Gödel</u> Il sistema formale che stiamo introducendo ha questo problema:

(i) σ è <u>incoerente</u>
cioè c'è una proposizione P tale che sia P che $\neg P$ sono dimostrabile.
("ex falso quodlibet") $P \land \neg P \Rightarrow Q$

(ii) oppure è <u>incompleto</u>
cioè c'è una proposizione P tale che né P né $\neg P$ sono dimostrabili.

Inoltre: se il sistema non è <u>incoerente</u> non è possibile dimostrarlo.

$\neg(2+2=4)$ falsa

$\neg\neg P$ è equiv. a P

Operatori logici:

$\wedge$: "and" congiunzione logica

$P \wedge Q$ intendo che sia P che Q sono vere.

$P \vee Q$ "vel" disgiunzione logica

intendo che almeno uno tra P e Q è vera.

Tabelle di verità

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$(\neg P) \vee \neg Q$
F	F	F	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V	V
F	V	F	V	V	F	V	V
V	V	V	V	F	F	F	F

$P \wedge Q$, $Q \wedge P$ sono logicamente equivalenti

$P \vee Q$, $Q \vee P$ "

$\neg(P \wedge Q)$, $(\neg P) \vee (\neg Q)$ "

$\neg(P \vee Q)$, $(\neg P) \wedge (\neg Q)$ "

leggi di De Morgan

Implicazioni logiche

$P \Rightarrow Q$ "P implica Q"

"se P allora Q"

"Q se P"

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$
F	F	F	F	V
V	F	F	V	F
F	V	F	V	V
V	V	V	V	V

Esempio $\quad (n > 5) \Rightarrow (n > 3)$

$n = 7 \qquad 7 > 5 \Rightarrow 7 > 3$

$n = 4 \qquad 4 > 5 \Rightarrow 4 > 3$

$n = 2 \qquad 2 > 5 \Rightarrow 2 > 3$

$P \Rightarrow Q$ è equivalente $\neg(P \wedge \neg Q)$

Esercizio verificare con le tabelle di verità.

Osservazione è anche equiv. a $(\neg P) \vee Q$

$P \Leftarrow Q$ significa $Q \Rightarrow P$

"P se Q"

"P è implicato da Q"

$P \Leftrightarrow Q$ equiv. $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$

Esercizio $P \Leftrightarrow Q$ significa che

P e Q sono equivalenti

Proprietà

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \neg(P \wedge \neg Q)$$

$$\Updownarrow$$

$$(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$$

?

$$\Updownarrow$$

$$\neg\big((\neg Q) \wedge \neg(\neg P)\big)$$

$$\Updownarrow$$

$$\neg((\neg Q) \wedge P)$$

$$\Updownarrow$$

$$\neg(P \wedge \neg Q)$$

$$\Updownarrow$$

$$P \Rightarrow Q$$

$$\big(\neg(P \Rightarrow Q)\big) \Leftrightarrow \neg(\neg Q \Rightarrow \neg P)$$

Es

P: n divisibile per 6

Q: n è pari

$P \Rightarrow Q$: Se n divisibile per 6 allora n pari

$\neg Q \Rightarrow \neg P$: Se n dispari non è divisibile per 6.