Analisi Matematica
Soluzioni prova scritta parziale n. 3

Corso di laurea in Fisica, 2020-2021

24 aprile 2021

1. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza del seguente integrale improprio:
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{(\sqrt[3]{x}-1)\cdot(x^2+x)^\alpha}\,dx.$$
Per quali α l'integrale converge?

Soluzione. La funzione integranda $f(x)$ è definita e continua sulla unione dei due intervalli $(0,1)\cup(1,+\infty)$. Inoltre la funzione integranda è positiva in quanto numeratore e denominatore hanno lo stesso segno sui due intervalli. Vogliamo fare uno studio asintotico della funzione nei tre punti $x \to 0^+$, $x \to 1^\pm$ e $x \to +\infty$.

Per $x \to 0^+$ si ha $x^2 \ll x$ e quindi
$$f(x) \sim \frac{-1}{-1\cdot x^\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}.$$
Per il criterio di confronto asintotico l'integrale in un intorno destro di $x = 0$ è convergente se e solo se $\alpha < 1$.

Per $x \to 1^\pm$ (ricordando che $(1+t)^\beta = 1 + \beta t + o(t)$ per $t \to 0$) si ha
$$f(x) \sim \frac{(x-1)^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[3]{2}}{\frac{1}{3}(x-1)\cdot 2^\alpha} = \frac{C}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}.$$
Dunque l'integrale converge in un intorno destro e in un intorno sinistro di $x = 1$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Per $x \to +\infty$ si ha
$$f(x) \sim \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{2}{\alpha}}} \sim \frac{1}{x^{2\alpha-\frac{1}{3}}}.$$
Dunque l'integrale converge in un intorno di $+\infty$ se e solo se $2\alpha - \frac{1}{3} > 1$ ovvero se $\alpha > \frac{2}{3}$.

In conclusione l'integrale dato converge se e solo se $\frac{2}{3} < \alpha < 1$. □

2. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(x) = 2x \cdot (u(x) + x^2), \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

Quanto vale $u(1)$?

Soluzione. Si tratta di una equazione lineare del primo ordine:

$$u' - 2xu = 2x^3$$

moltiplicando ambo i membri per il fattore integrante e^{-x^2} si ottiene

$$(u \cdot e^{-x^2})' = 2x^3 e^{-x^2}$$

da cui

$$u \cdot e^{-x^2} = \int 2x^3 e^{-x^2}\, dx.$$

L'integrale può essere svolto per parti:

$$\begin{aligned} \int 2x^3 e^{-x^2}\, dx &= \int (-x^2) \cdot (-2xe^{-x^2})\, dx \\ &= -x^2 e^{-x^2} + \int 2xe^{-x^2}\, dx \\ &= -x^2 e^{-x^2} - e^{-x^2} + c. \end{aligned}$$

Per $x = 0$ si ottiene

$$u(x) = -e^0 + c \stackrel{!}{=} 0$$

da cui $c = 1$. Dunque la soluzione è:

$$u(x) = e^{x^2} - x^2 - 1.$$

□

3. Determinare tutte le soluzioni della equazione differenziale:

$$u'' - 7u' + 12u = \frac{e^{3x}}{e^x + 1} + \cos x.$$

Dimostrazione. Soluzione. Si tratta di una equazione lineare a coefficienti costanti non omogenea. Il polinomio associato è $P(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda + 12 = (\lambda - 4)(\lambda - 3)$ e dunque tutte le soluzioni della equazione omogenea $P(D)u = 0$ sono della forma

$$u_0(x) = Ae^{3x} + Be^{4x}.$$

Una soluzione particolare u_* dell'equazione $P(D)u = \frac{e^{3x}}{e^x+1}$ si può determinare con il metodo della variazione delle costanti:

$$u_* = A(x)e^{3x} + B(x)e^{4x}.$$

I coefficienti A e B dovranno risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} A'e^{3x} + B'e^{4x} = 0 \\ 3A'e^{3x} + 4B'e^{4x} = \frac{e^{3x}}{e^x+1} \end{cases}$$

da cui si trova

$$\begin{cases} A' = -\frac{1}{e^x+1} \\ B' = \frac{e^{-x}}{e^x+1}. \end{cases}$$

I coefficienti si trovano dunque integrando. Utilizzeremo la sostituzione $e^x = t$, $dx = \frac{1}{t}\,dt$:

$$\begin{aligned} A &= -\int \frac{1}{e^x+1}\,dx = -\int \frac{1}{(t+1)t}\,dt \\ &= -\int \frac{1}{t}\,dt + \int \frac{1}{t+1}\,dt = -\ln t + \ln(t+1) = \ln(1+\frac{1}{t}) \\ &= \ln(1+e^{-x}). \end{aligned}$$

Similmente

$$B = \int \frac{e^{-x}}{e^x+1}\,dx = \int \frac{1}{e^x}\,dx - \int \frac{1}{e^x+1}\,dx = -e^{-x} - \ln(1+e^{-x}).$$

Dunque una soluzione particolare è

$$u_*(x) = e^{3x}\ln(1+e^{-x}) + e^{4x}(e^{-x} - \ln(1+e^{-x})).$$

Ma visto che $e^{4x}e^{-x} = e^{3x}$ è una soluzione della equazione omogenea, ci basta considerare al posto di u_* la funzione:

$$v_* = (e^{3x} - e^{4x}) \cdot \ln(1+e^{-x})$$

che è un'altra soluzione particolare.

Una soluzione particolare u_{**} dell'equazione $P(D)u = \cos x$ si può determinare con il metodo di similarità:

$$u_{**} = C\sin x + D\cos x.$$

Le derivate sono:

$$u'_{**} = C\cos x - D\sin x, \qquad u''_{**} = -C\sin x - D\cos x$$

e andando a sostituire nell'equazione $P(D)u = \cos x$ si ottiene:

$$(-C + 7D + 12C)\sin x + (-D - 7C + 12D)\cos x = \cos x$$

da cui

$$\begin{cases} 11C + 7D = 0 \\ -7C + 11D = 1 \end{cases}$$

che risolto ci dà: $C = -\frac{7}{170}$, $D = \frac{11}{170}$. Dunque

$$u_{**} = \frac{11\cos x - 7\sin x}{170}.$$

Dunque ogni soluzione dell'equazione non omogenea iniziale è della forma $u = u_0 + v_* + u_{**}$ cioè:

$$u(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{4x} + (e^{3x} - e^{4x}) \cdot \ln(1 + e^{-x}) + \frac{11\cos x - 7\sin x}{170}.$$

$\square$