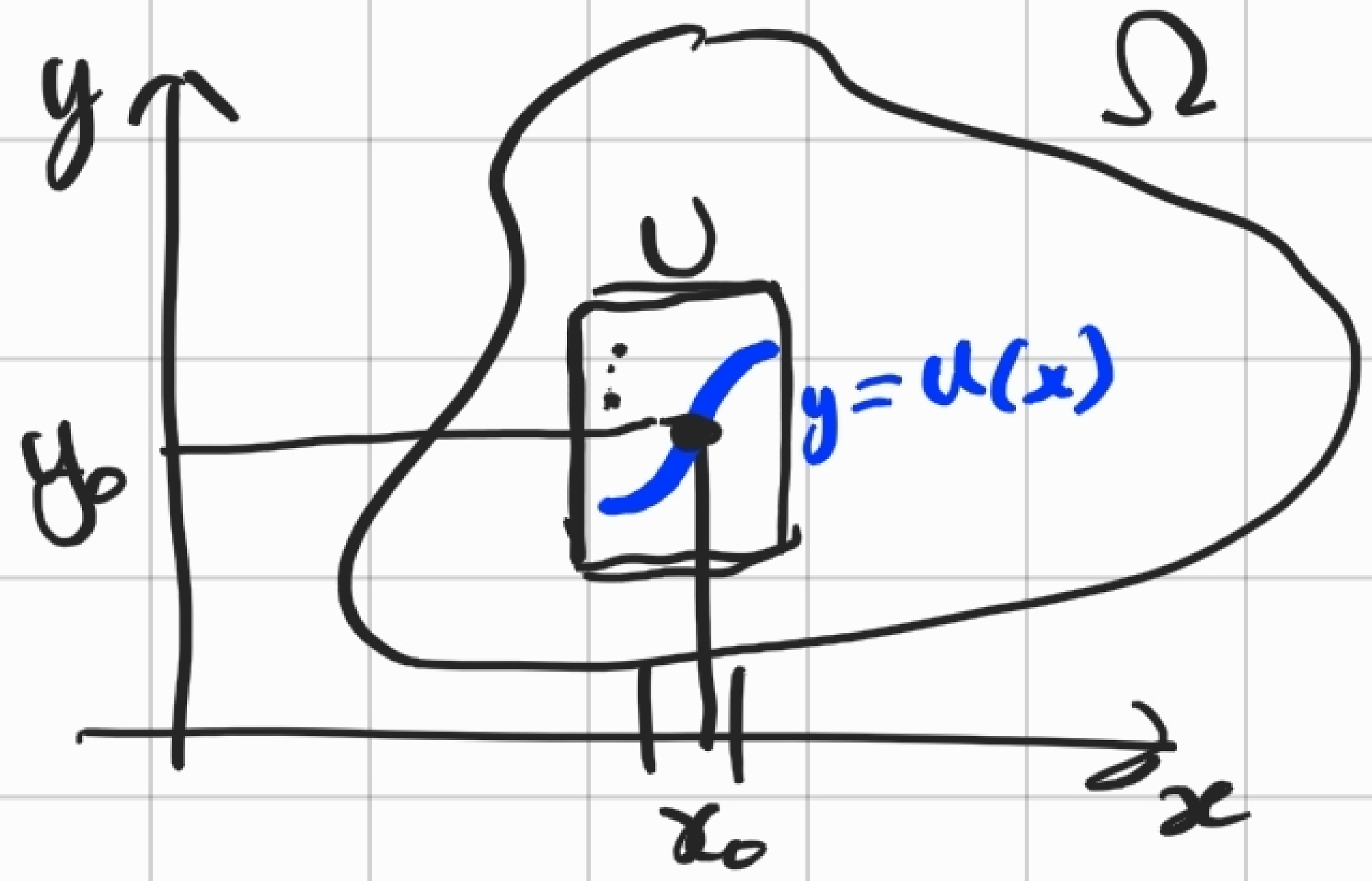
ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 78 - 23.4.2021

Teorema (Cauchy-Lipschitz: esistenza e unicità locale)



Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \Omega$ tale che:

① f continua.

② f "è localmente lipschitziana rispetto a y uniformemente rispetto a x"

$\forall (x_0,y_0) \in \Omega \ \exists\, U$ intorno di (x_0,y_0) $\exists\, L \geq 0$ t.c. $\forall x, y_1, y_2$ t.c. $(x,y_1), (x,y_2) \in U$

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2|$$

Allora $\exists\, \delta > 0$ tale che per ogni I intervallo

$$I \subseteq [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \quad \exists!\, u : I \to \mathbb{R}$$

tale che $u \in C^1$, u soddisfa $(\ast)$

$(*)$ $\begin{cases} \underline{u}'(x) = \underline{f}(x, \underline{u}(x)) \\ \underline{u}(x_0) = \underline{y_0} \end{cases}$ Problema di Cauchy.

Oss Se $f \in C^1$ allora soddisfa le ipotesi del teorema:

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = \underbrace{\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi)\right|}_{\leq L} \cdot |y_1 - y_2|$$

Se $\frac{\partial f}{\partial y}$ è continua anche $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$ è continuo e quindi ha massimo L

---

dim (teorema Cauchy-Lipschitz)

Passo 1 Se $u \in C^1$ che soddisfa $(*)$

$$\underbrace{\int_{x_0}^{x} u'(t)\,dt}_{u(x) - u(x_0)} = \int_{x_0}^{x} f(t, u(t))\,dt$$

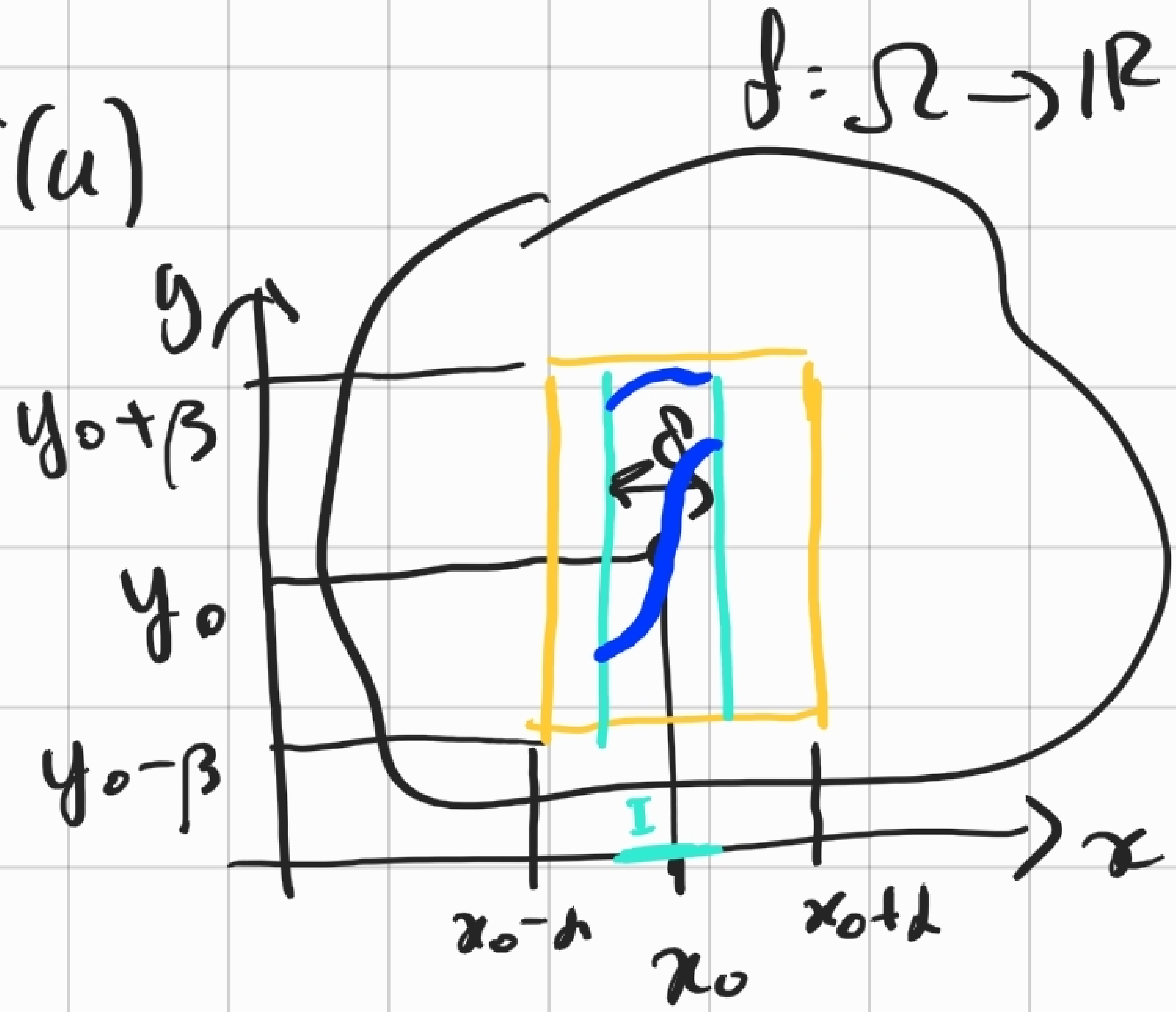
$$(**) \quad \boxed{u(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u(t))\,dt}$$

Viceversa se $u \in C^0$ e soddisfa $(**)$ allora $u \in C^1$ e soddisfa $(*)$.

Passo 2 Scrivo $(**)$ $T(u) = u$

$$T(u)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u(t))\, dt$$

$$T : C^0 \longrightarrow C^0$$
$$u \longmapsto T(u)$$



$$C_{\alpha\beta} = [x_0-\alpha, x_0+\alpha] \times [y_0-\beta, y_0+\beta]$$

Sceglieremo opportunamente $\boxed{\delta \leq \alpha}$

$$C_{\delta\beta} = [x_0-\delta, x_0+\delta] \times [y_0-\beta, y_0+\beta]$$

$\underline{I} \subseteq [x_0-\delta, x_0+\delta]$ $\quad x_0 \in I$.

$$X = \{ u : I \to [y_0 - \beta, y_0 + \beta],\ u \text{ continua} \}$$

X è completo rispetto alla

distanza uniforme: $d_\infty(u,v) = \sup_{x \in I} |u(x) - v(x)|$

$T : X \to X$ $\quad$ (se $\underline{\underline{u \in X}} \overset{?}{\Rightarrow} T(u) \in X$)

$$T(u)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u(t))\, dt$$

$T(u) \overset{?}{\in} X \iff |T(u)(x) - y_0| \le \beta$

$$|T(u)(x) - y_0| \le \left| \int_{x_0}^{x} |f(t, u(t))|\, dt \right|$$

[f è continua! $\Rightarrow$ $|f|$ ha massimo M su $C_{\alpha\beta}$.]

$$\le \left| \int_{x_0}^{x} M\, dt \right| = |x - x_0| \cdot M \le \delta \cdot M \overset{!}{\le} \beta$$

Basterà che sia $\boxed{\delta \le \frac{\beta}{M}}$

$$T(X) \subseteq X$$

Passo 3: T è una contrazione:

$$d_\infty\big(T(u_1), T(u_2)\big) \leq \ell \cdot d_\infty(u_1, u_2)$$

con $\ell < 1$.

$$\| \quad \sup_{x \in I} \left| T(u_1)(x) - T(u_2)(x) \right|$$

$$\left|T(u_1)(x) - T(u_2)(x)\right| = \left| \cancel{y_0} + \int_{x_0}^{x} f(t, u_1(t))\,dt - \cancel{y_0} - \int_{x_0}^{x} f(t, u_2(t))\,dt \right|$$

$$\leq \left| \int_{x_0}^{x} \left| f(t, u_1(t)) - f(t, u_2(t)) \right| dt \right|$$

$$\leq \left| \int_{x_0}^{x} L \cdot |u_1(t) - u_2(t)|\, dt \right|$$

$$\leq L \left| \int_{x_0}^{x} d_\infty(u_1, u_2)\, dt \right| \leq L \cdot d_\infty(u_1, u_2) \cdot |x - x_0|$$

$$\leq L \cdot \delta \cdot d_\infty(u_1, u_2)$$

$$d_\infty\big(T(u_1), T(u_2)\big) \leq L \cdot \delta \cdot d_\infty(u_1, u_2)$$

$$\ell = L \cdot \delta < 1$$

se $\delta < \frac{1}{L}$

Per B-C

$$\exists!\, u \in X : T(u) = u$$

$\Leftrightarrow \exists !\ u \in X$ che soddisfa $(**)$

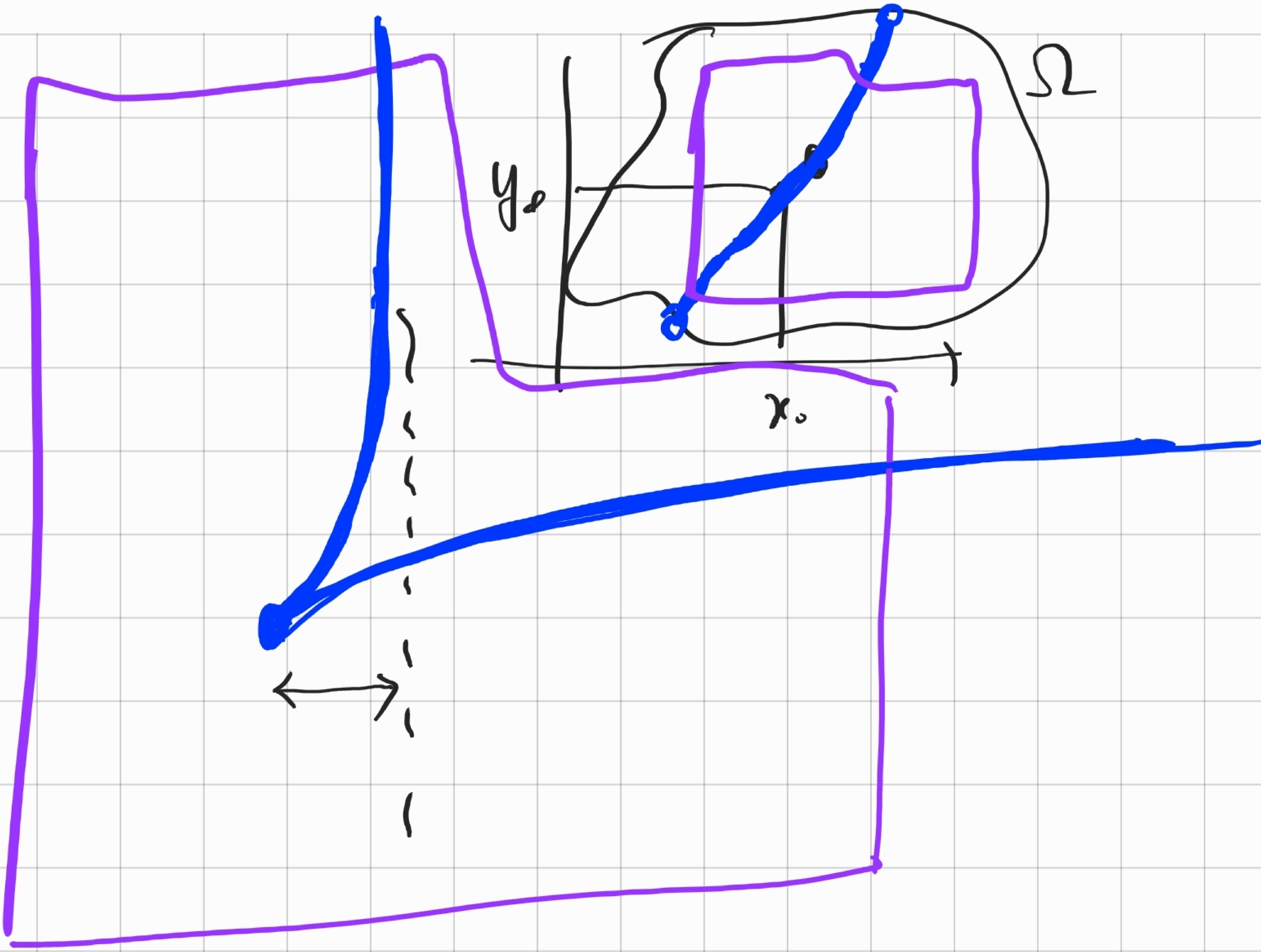
$\Leftrightarrow \exists !\ u \in C^1$ che soddisfa $(*)$. $\square$

Il teorema C-L vale anche per i sistemi del I ordine e quindi anche per le equazioni di ordine n:

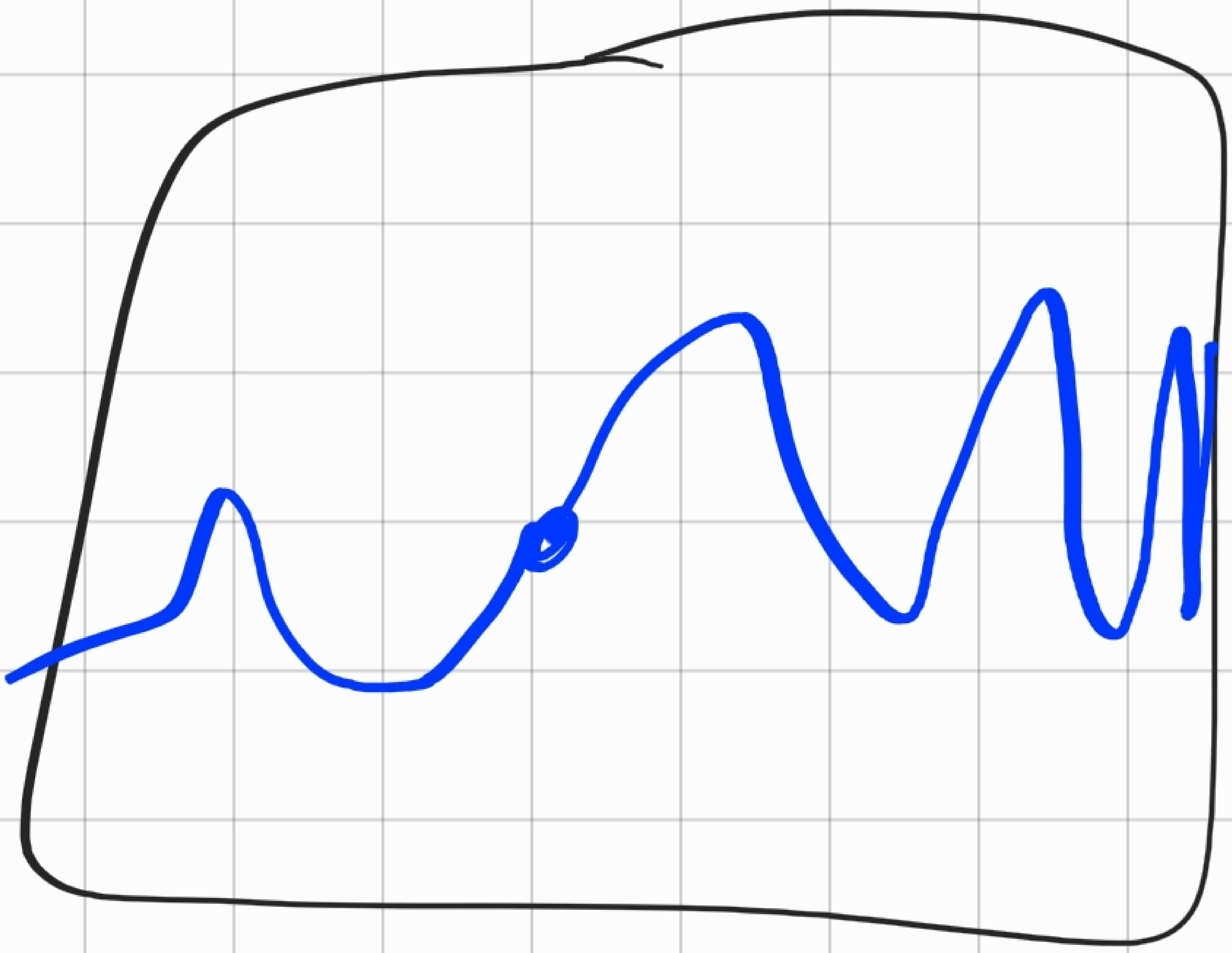
$$\begin{cases} u^{(n)}(x) = f(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(n-1)}(x)) \\ \left.\begin{array}{l} u(x_0) = y_0 \\ u'(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{array}\right] = \underline{y}_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

$$u(x) \rightsquigarrow \mathrm{Jet}(u) = \begin{bmatrix} u(x) \\ u'(x) \\ u''(x) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}$$

... lo stesso vale per i sistemi di equazioni di ordine n.



y_0
x_0
Ω



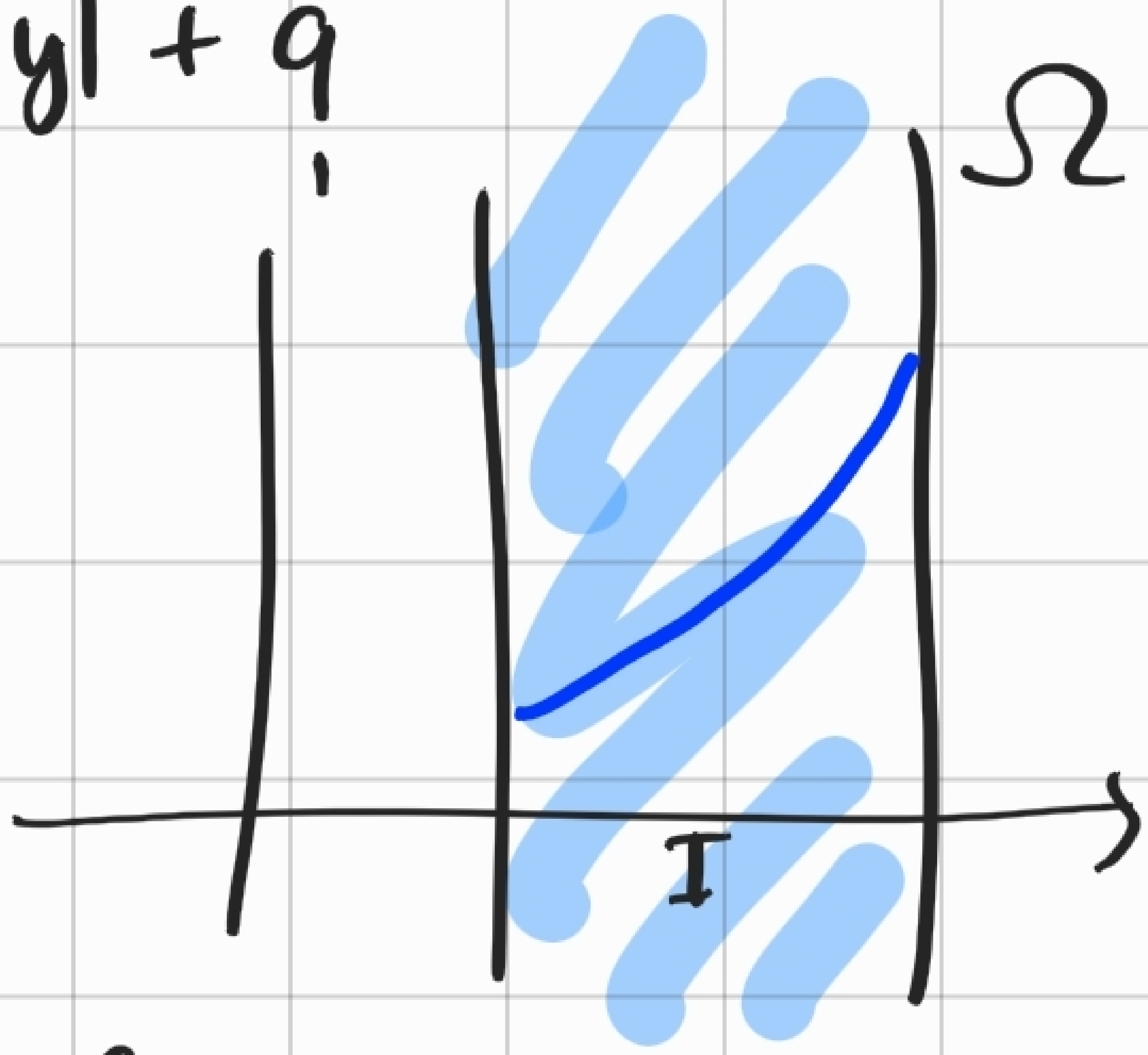
Teorema (esistenza globale)

$$\begin{cases} u' = f(x, u(x)) \\ u(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Stesse ipotesi dell'esistenza locale

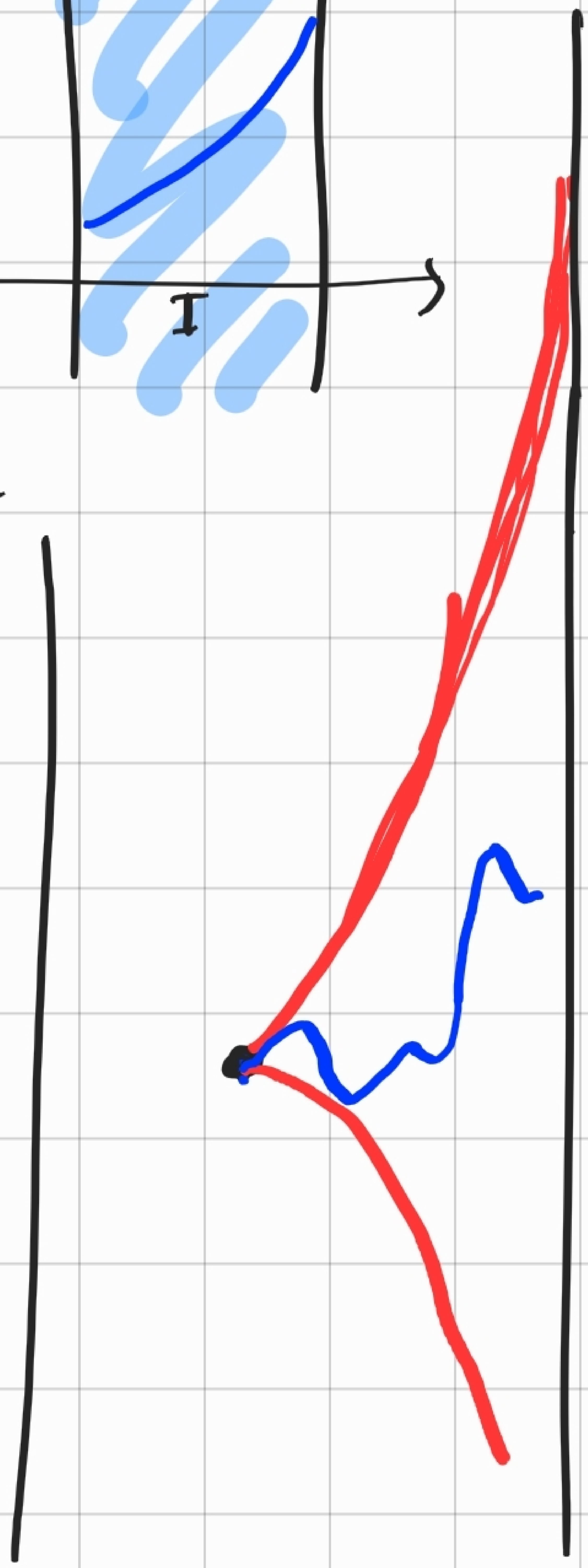
(+) $\exists\, m, q \in \mathbb{R}$:

$$|f(x,y)| \leq m \cdot |y| + q$$



$$f : \underset{\uparrow}{I} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Allora la soluzione massimale u è definita su tutto I.



Idea

$$u' = f(x, u(x))$$

$$|u'| \leq m|u| + q$$

$$u' = mu + q$$

Teorema Se

$$u^{(n)} = f(x, u(x), u'(x) \dots, u^{(n-1)}(x))$$

è lineare omogenea:

$$u^{(n)}(x) = Lu = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) \cdot u^{(k)}(x) = 0$$

$$f(x, \underline{y}) = \underline{a}(x) \cdot \underline{y}$$

Allora $V = \operatorname{Ker} L = \{\text{soluzioni}\}$

è uno sp. vettoriale (lo sapevamo già)

di $\dim V = n$

dim
$$J : V \to \mathbb{R}^n$$
$$u \longmapsto \begin{pmatrix} u(x_0) \\ u'(x_0) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}$$

fissato x_0

J è lineare.

J è suriettivo? Dato $y_0 \in \mathbb{R}^n$

$\exists$ una sol. $u \in V$: $\begin{cases} u^{(n)} = Lu \\ J(u) = y_0 \end{cases}$

J è iniettivo?

$$J(u_1) = J(u_2)$$

$$\begin{cases} u_1^{(n)} = Lu_1 \\ J(u_1) = y_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_2^{(n)} = L u_2 \\ J(u_2) = y_0 \end{cases}$$

per l'unicità : $u_1 \equiv u_2$

$$\dim Y = \dim \mathbb{R}^n = n \qquad \square$$

L'eq. non omogenea ha come soluzione una traslazione di $\operatorname{Ker} L$

$$\operatorname{Ker} L + u_*$$

che è quindi uno spazio affine della stessa dimensione.