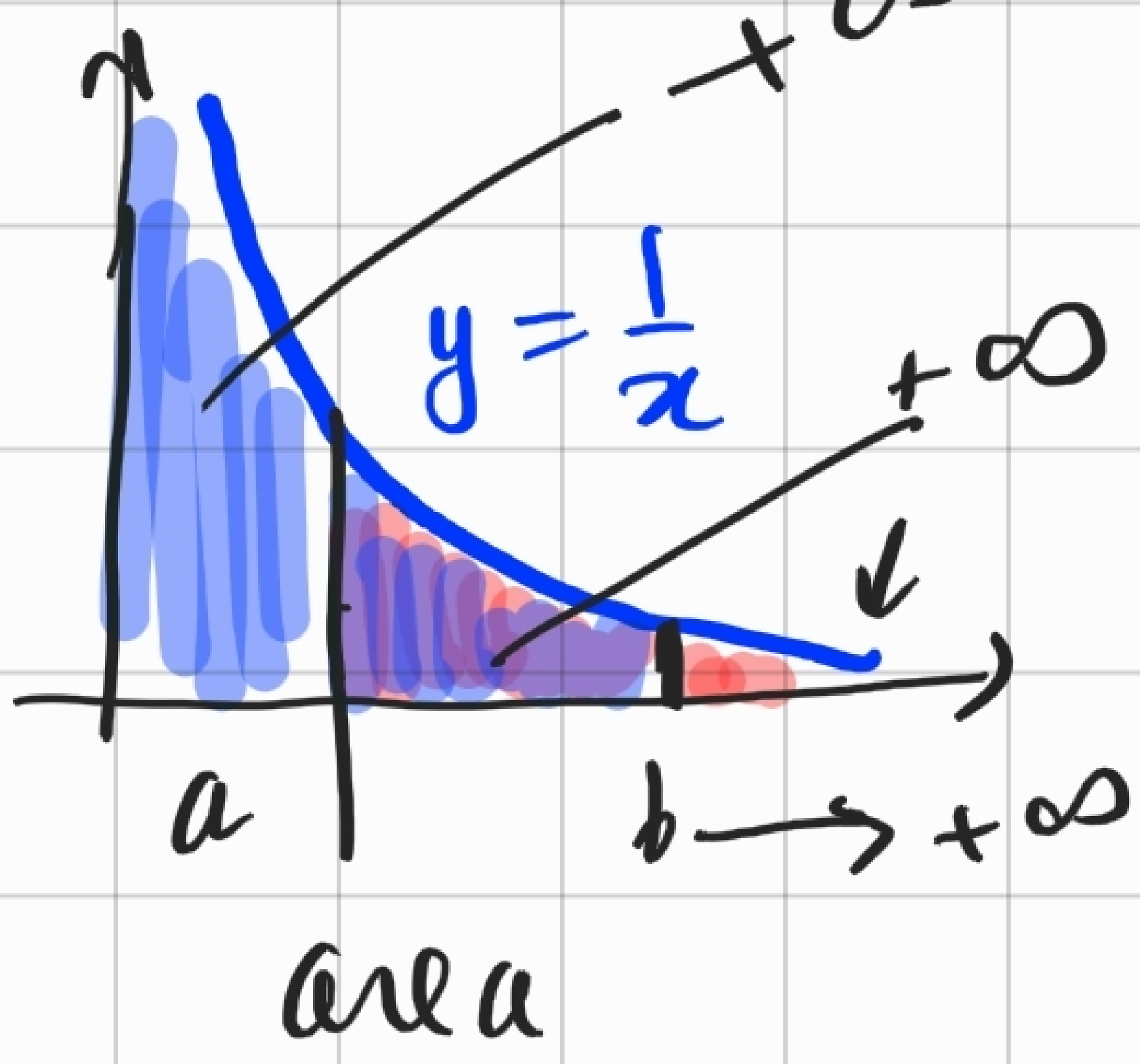
ANALISI MATEMATICA
LEZIONE 66 - 17.3.2021

Integrali impropri

Integrale di Riemann: $\int_a^b f(x)\,dx$

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$

f limitata.



Esempio 1

$f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$

$f(x)=\frac{1}{x}$

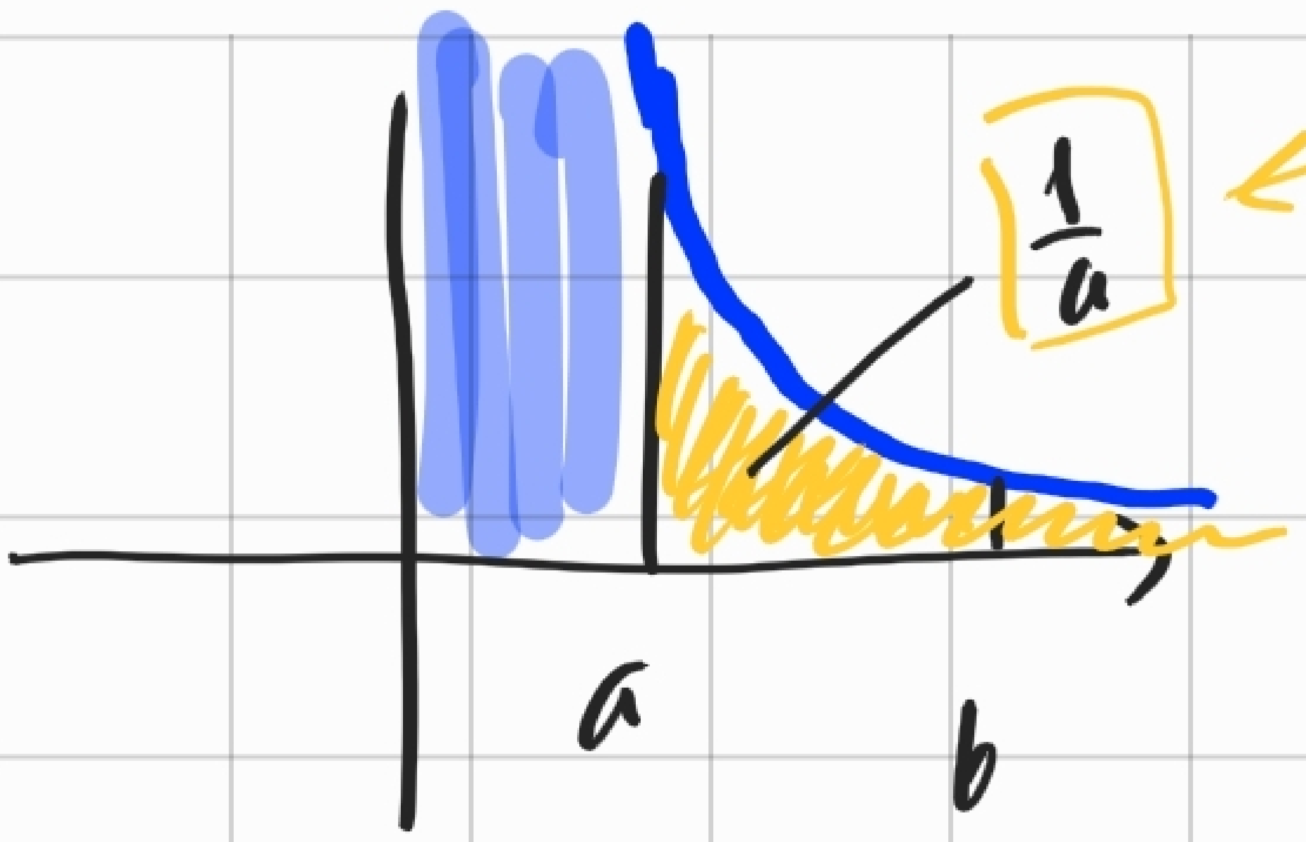
Su $[a,b]\subseteq(0,+\infty)$

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b \frac{1}{x}\,dx=\lim_{b\to+\infty}\left[\ln x\right]_a^b=\lim_{b\to+\infty}\ln b-\ln a$$

$$=+\infty$$

$$\lim_{a\to0^+}\int_a^b\frac{1}{x}\,dx=\lim_{a\to0^+}\ln b-\ln a=+\infty$$

Esempio 2



$$y = \boxed{\frac{1}{x^2}}$$

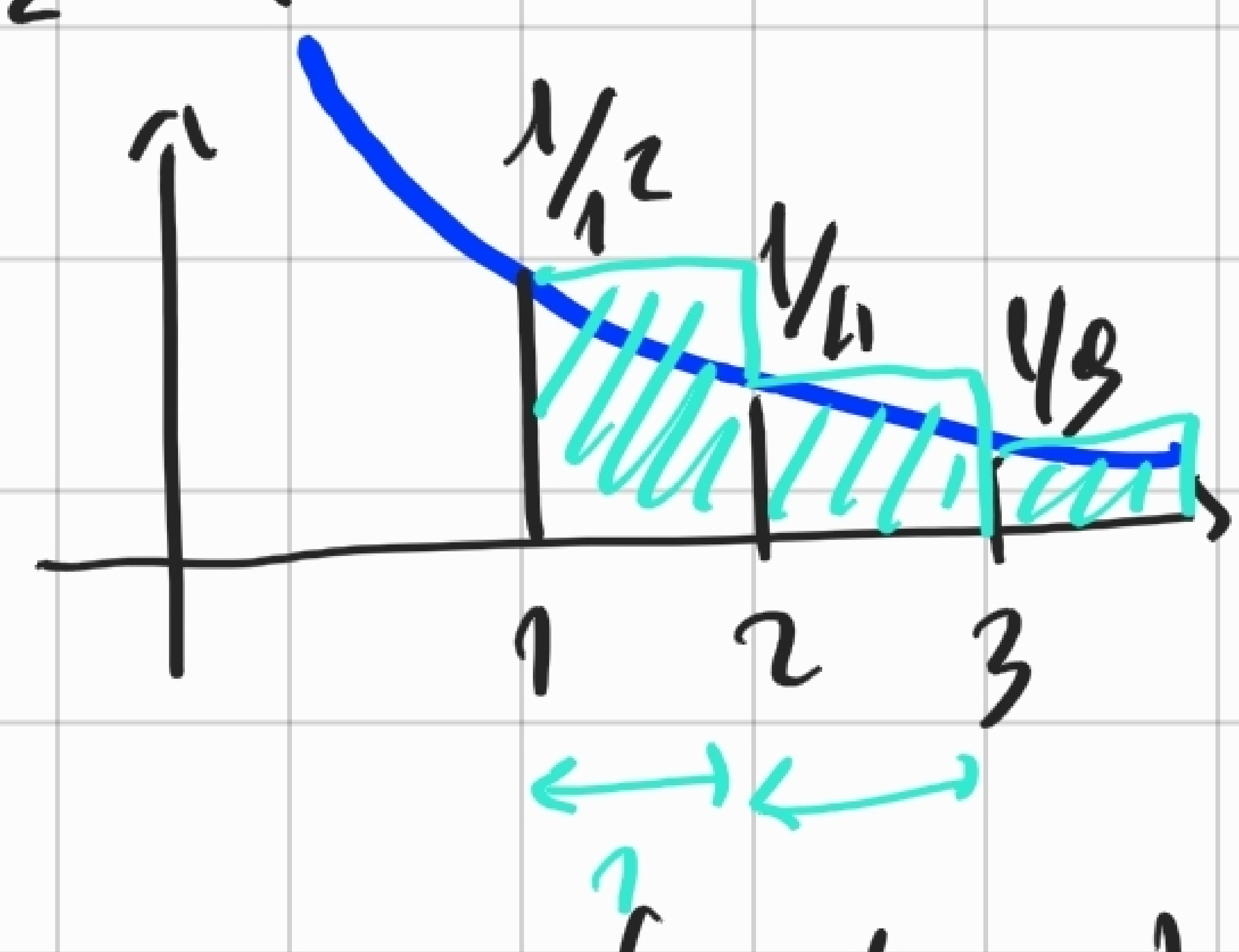
$$f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$\int_a^b \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_a^b = -\frac{1}{b} + \frac{1}{a}$$

$$\lim_{b\to+\infty} \int_a^b \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a}$$

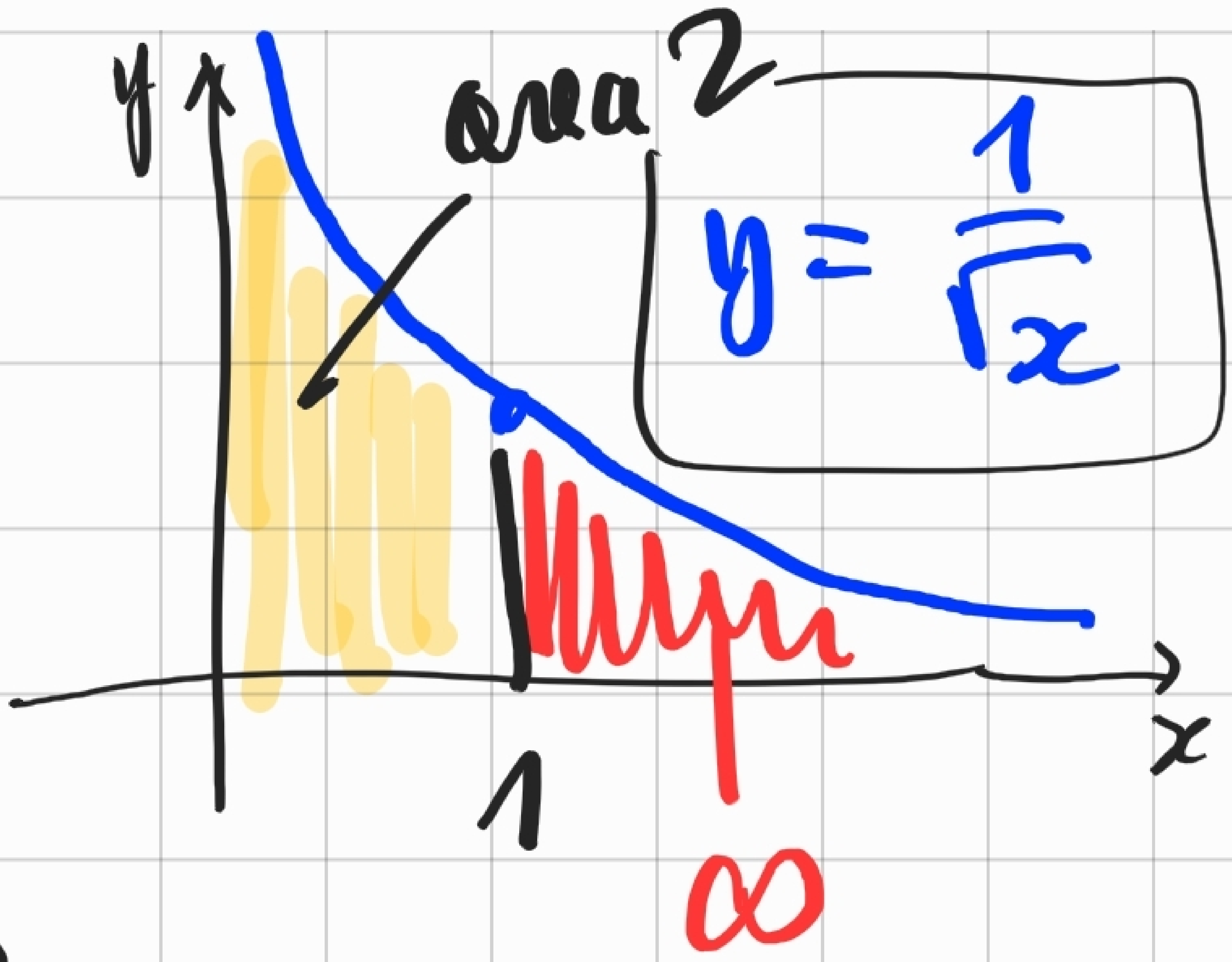
analogo: $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty$



$$\lim_{a\to0^+} \int_a^b \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{a\to0^+}\left(-\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right) = +\infty$$

(in effetti $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} > \dfrac{1}{x} & \text{se } x<1 \\[2ex] \dfrac{1}{x^2} < \dfrac{1}{x} & \text{se } x>1 \end{cases}$

Esempio 3



$$\lim_{a \to 0^+} \int_a^b \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$$

$$= \lim_{a \to 0^+} \left[2\sqrt{x} \right]_a^b$$

$$= \lim_{a \to 0^+} \left(2\sqrt{b} - 2\sqrt{a} \right)$$

$$= 2\sqrt{b} \quad \in \mathbb{R}.$$

Domande?

$$\lim_{a \to 0} \lim_{b \to +\infty} \int_0^b f(x)\, dx = ?$$

Definizione

Integrale improprio (o generalizzato)

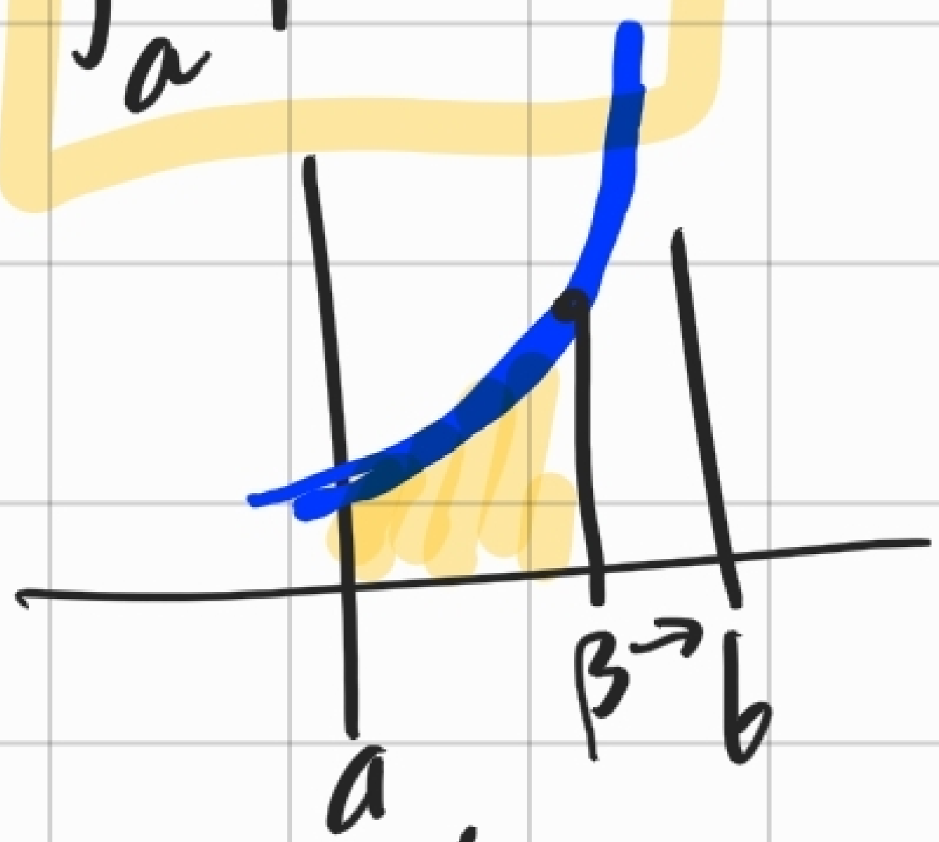
monolaterale (c'è un problema in solo un estremo dell'intervallo)

Sia $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ $\quad a<b\le+\infty$

f Riemann integrabile (e limitata) su ogni intervallo $[a,\beta]$ con $\beta\in[a,b)$.

D f localmente R-integrabile su $[a,b)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\beta\to b^-}\boxed{\int_a^\beta f(x)\,dx}$$



$\int f$ è convergente

il limite
- esiste
  - finito ← f è integrabile in senso improprio su $[a,b)$
  - infinito ← f non è integrabile in senso improprio su $[a,b)$ (MA) l'integrale esiste. $\int f$ è divergente
- non esiste ← f non è integrabile (nemmeno in senso improprio) e l'integrale non esiste. $\int f$ è indeterminato

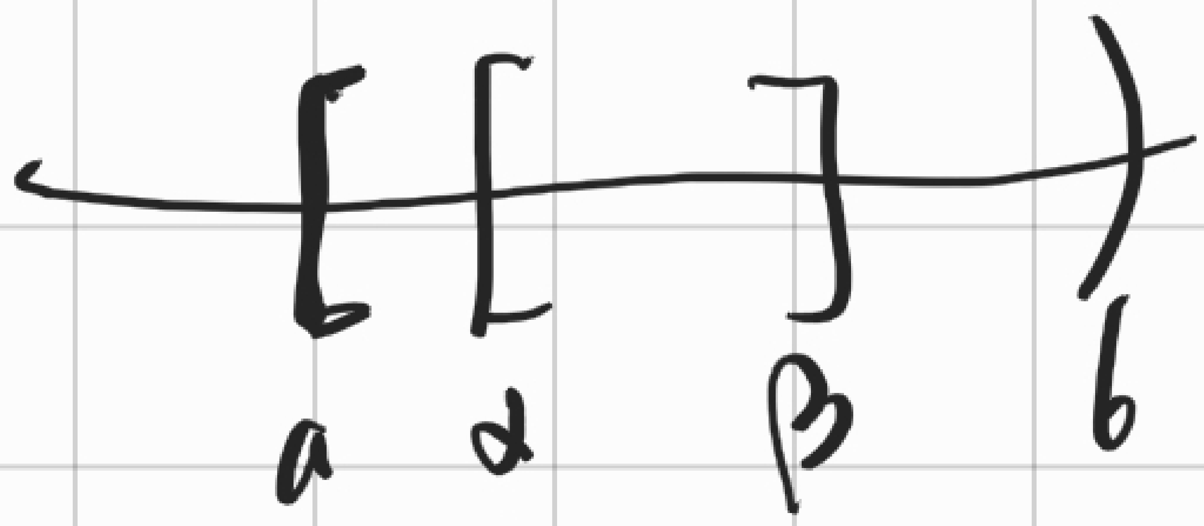
Lo stesso si fa su $(a,b]$:

se f è localmente R-integrabile su $(a,b]$.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\alpha\to a^+} \int_\alpha^b f(x)\,dx$$

Def [locale integrabilità]

Diremo che $f: A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è localmente R-integrabile se per ogni $[\alpha,\beta]\subseteq A$ si ha che f è R-integrabile su $[\alpha,\beta]$. $\Leftarrow$ f continua



Integrale improprio bilaterale:

$-\infty \le a < b \le +\infty$

sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ localmente R-integrabile

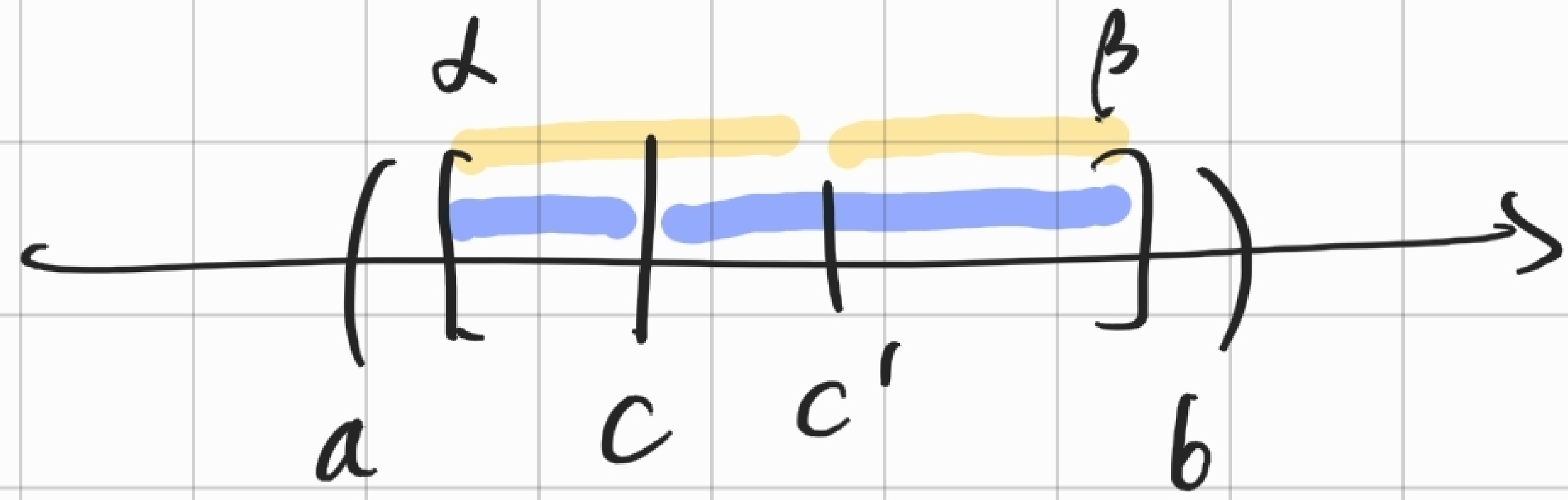
(cioè $\forall [\alpha,\beta]\subseteq(a,b)$ $\quad a<\alpha\le\beta<b$)

f è limitata e R-integrabile su $[\alpha,\beta]$)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \overbrace{\int_a^c f(x)\,dx}^{A} + \overbrace{\int_c^b f(x)\,dx}^{B}$$

con $c\in(a,b)$.

integrali impropri monolateri



$$(a,b) = (a,c] \cup [c,b)$$

A B

FINITO + FINITO = FINITO

f è integrabile in senso improprio e l'integrale esiste finito ($\int f$ è convergente)

FINITO + $(+\infty)$ = $+\infty$

FINITO + $(-\infty)$ = $-\infty$

f non è integrabile in senso improprio ma l'integrale esiste ed è divergente ($\int f$ è divergente)

lo stesso

$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$

$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$

$(+\infty) + (-\infty)$
$(-\infty) + (+\infty)$

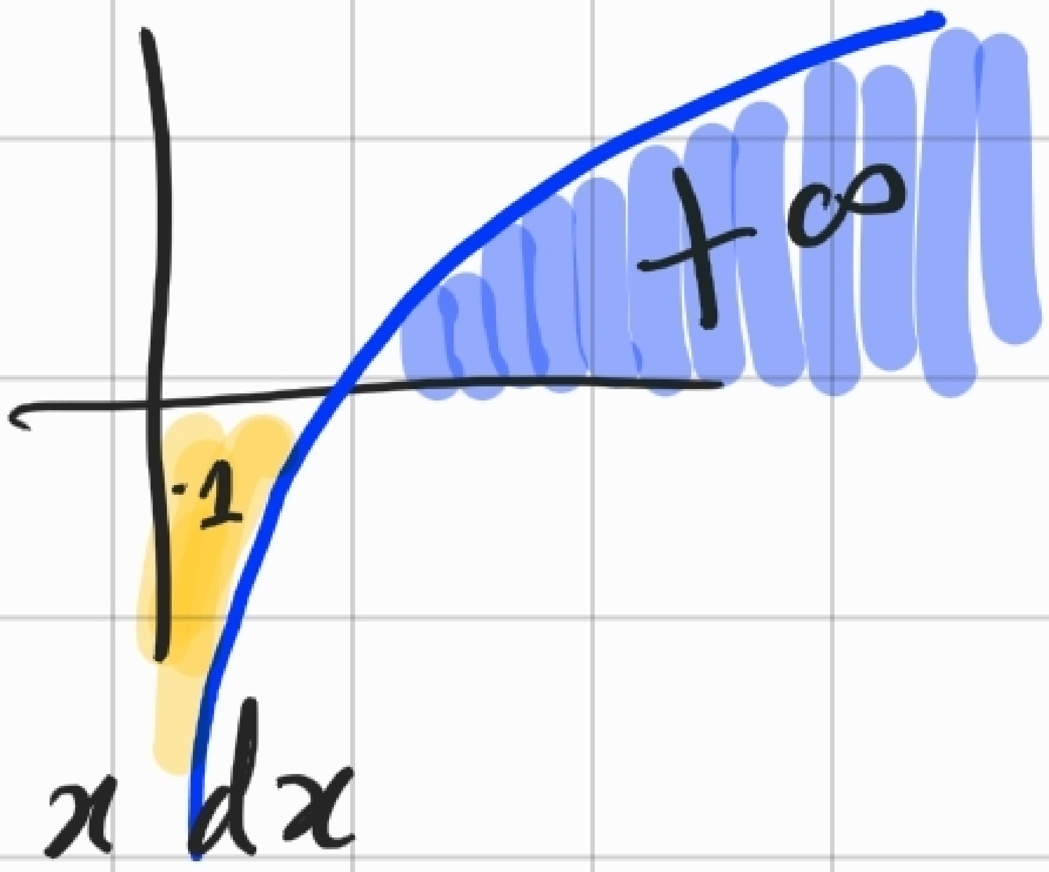
f non è integrabile

l'integrale non esiste (o è indeterminato)

$\int f$ è indeterminato.

lo stesso se uno dei due non esiste.

Esempio $f(x) = \ln(x)$



$$\int_0^{+\infty} \ln x \, dx = \int_0^1 \ln x \, dx + \int_1^{+\infty} \ln x \, dx$$

$$= \lim_{a \to 0^+} \int_a^1 \ln x \, dx + \lim_{b \to +\infty} \int_1^{+\infty} \ln x \, dx =$$

$$\left[\int \ln x \, dx = x \ln x - x \right)$$

$$= \lim_{a \to 0^+} \left[x \ln x - x \right]_a^1 + \lim_{b \to +\infty} \left[x \ln x - x \right]_1^b$$

$$= \lim_{a \to 0^+} \left[-1 - \underset{\downarrow \atop 0}{a \ln a} + \underset{\downarrow \atop 0}{a} \right] + \lim_{b \to +\infty} \left[b \ln b - b + 1 \right]$$

$$b(\ln b - 1)$$

$$\left[\int_0^1 \ln x\, dx = \boxed{-1} \right) \quad \int_1^{+\infty} \ln x\, dx = \boxed{+\infty} \right]$$

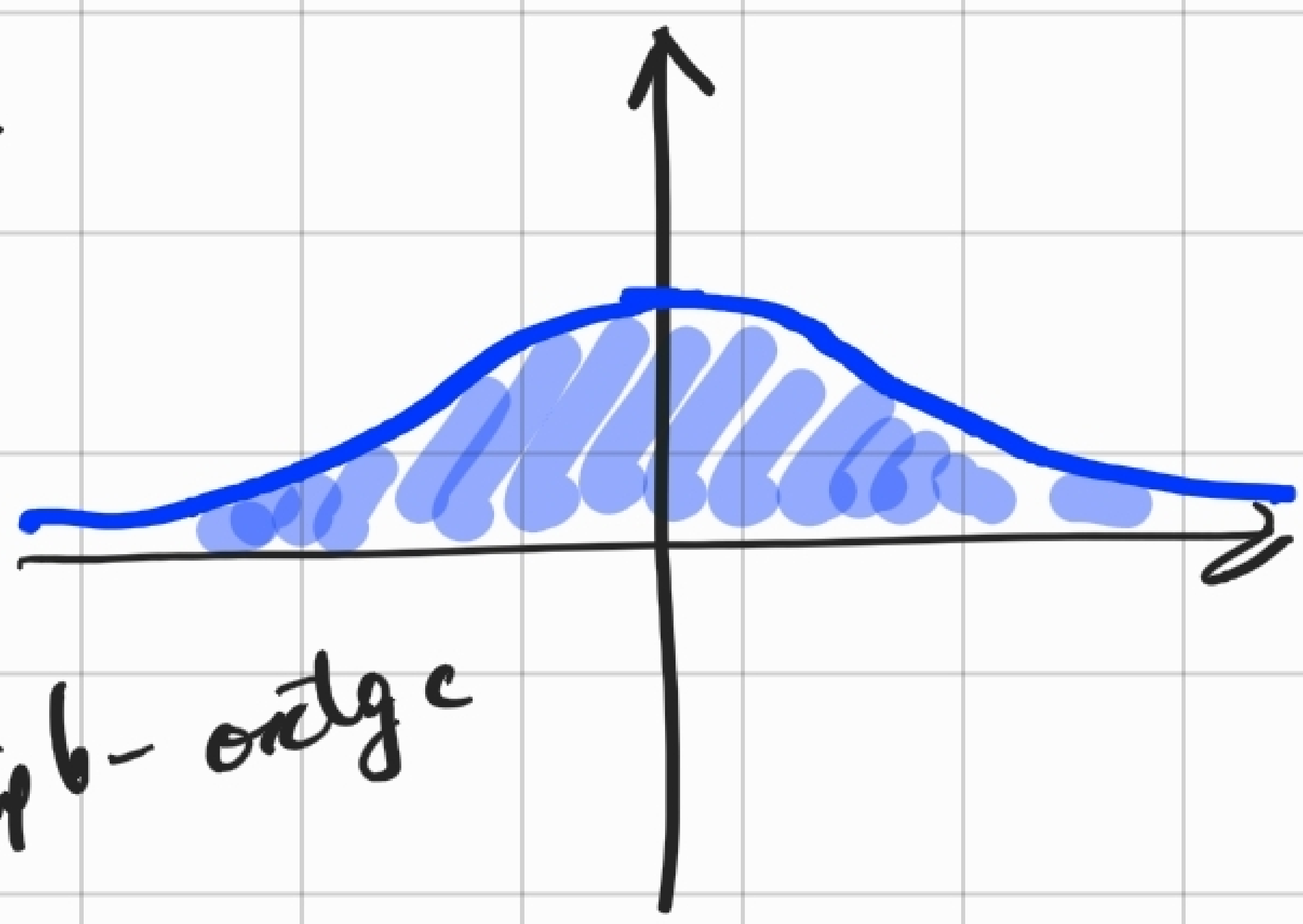
$$= -1 + \infty = +\infty$$

$\int_0^1 \ln x\, dx = -1$ convergente

$\int_1^{+\infty} \ln x\, dx = +\infty$ divergente

$\int_0^{+\infty} \ln x\, dx = +\infty$ divergente

Esempio $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$



arctg b - arctg c

$$\int_c^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b\to+\infty} \left[\operatorname{arctg} x\right]_c^b = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} c$$

$$\int_{-\infty}^{c} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{a\to-\infty} \left[\operatorname{arctg} x\right]_a^c = \operatorname{arctg} c - \left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} - \cancel{\operatorname{arctg} c} + \cancel{\operatorname{arctg} c} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

è convergente.

Notazione:

$$[f(x)]_a^b \overset{\text{def 2}}{=} \lim_{\beta \to b^-} f(\beta) - \lim_{\alpha \to a^+} f(\alpha)$$

$$\overset{\text{def 1}}{=} f(b) - f(a)$$

se f continua coincidono.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = [\operatorname{arctg} x]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

$$\int_0^{+\infty} \ln x \, dx = [x \ln x - x]_0^{+\infty}$$

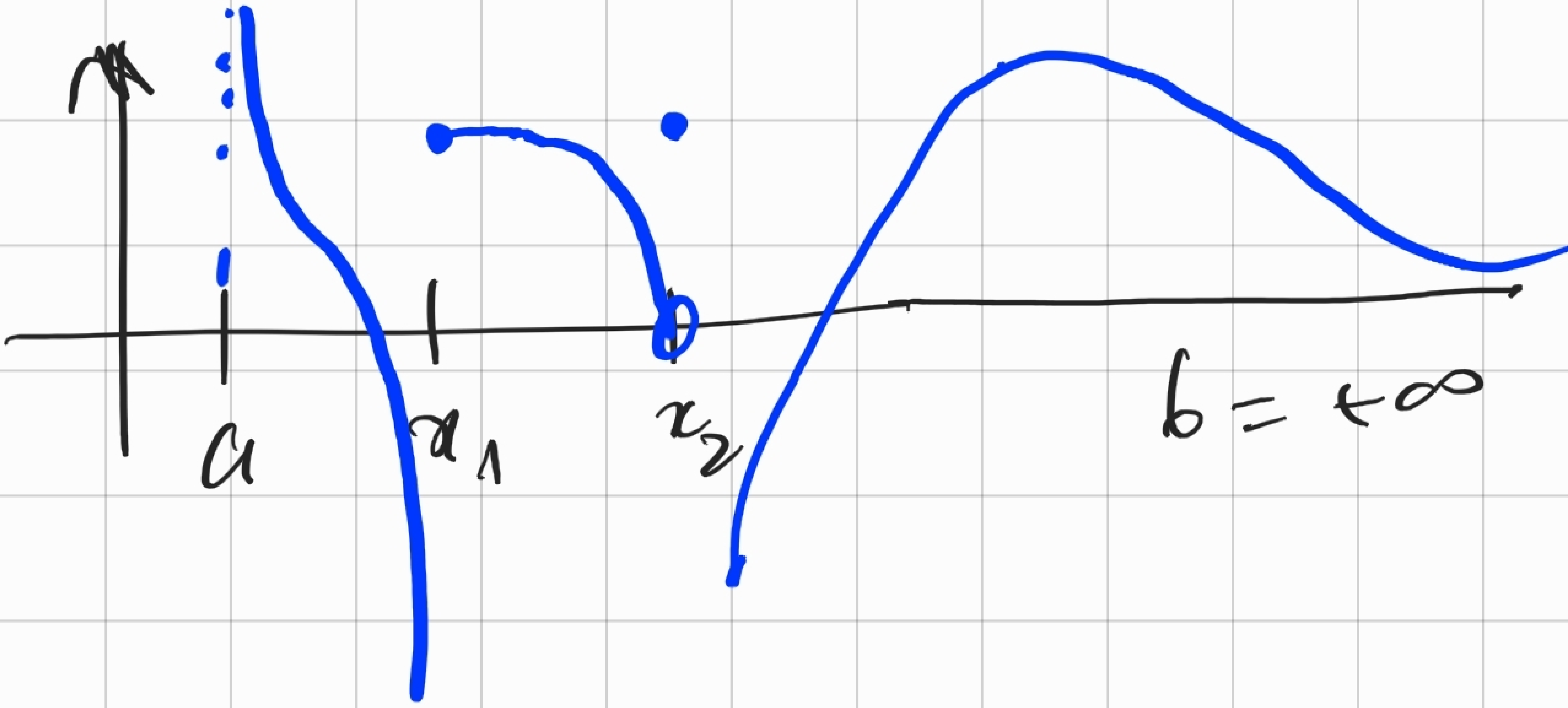
$$= +\infty - 0 = +\infty.$$

Integrale improprio multilaterale

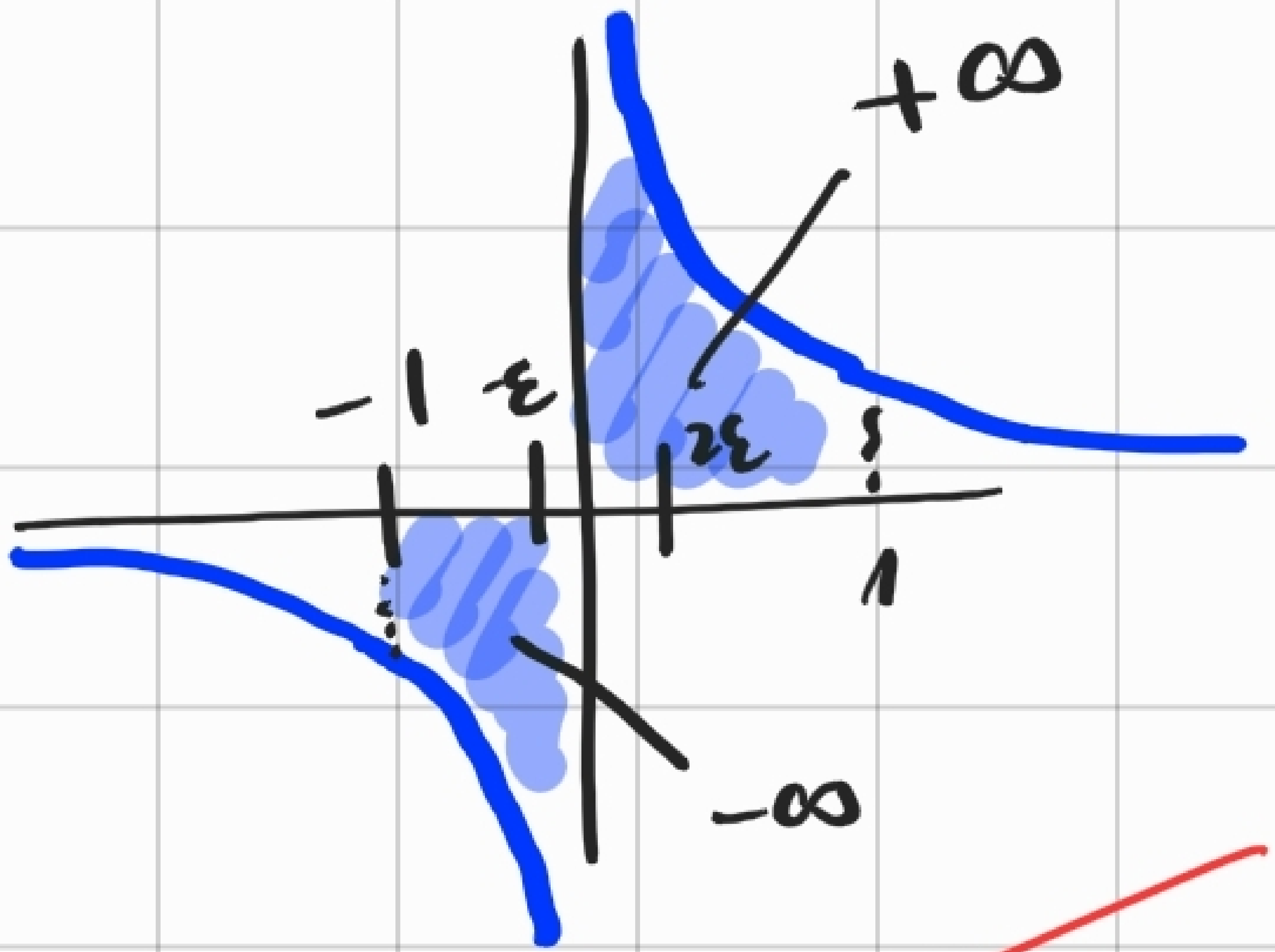
$$f : (a,b) \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \to \mathbb{R}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx.$$

$$[\,x_0 = a,\ b = x_{n+1}\,]$$



Esempio $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\, dx$



Attenzione $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\, dx \cancel{=} \left[\ln|x|\right]_{-1}^{1} = 0$ No

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\, dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x}\, dx + \cancel{\int_{0}^{1} \frac{1}{x}\, dx = (-\infty) + (+\infty)}$$

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x}\, dx = \left[\ln|x|\right]_{-1}^{0} = -\infty \qquad \int_{0}^{1} \frac{1}{x}\, dx = \left[\ln|x|\right]_{0}^{1} = -(-\infty) = +\infty$$

non è definito!

Definizione alternativa

$$\text{vp-}\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\, dx + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x}\, dx\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} (\ln \varepsilon - \ln \varepsilon)$$

$$= 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sin x}\,dx \overset{??}{=} \sum \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{1}{\sin x}$$