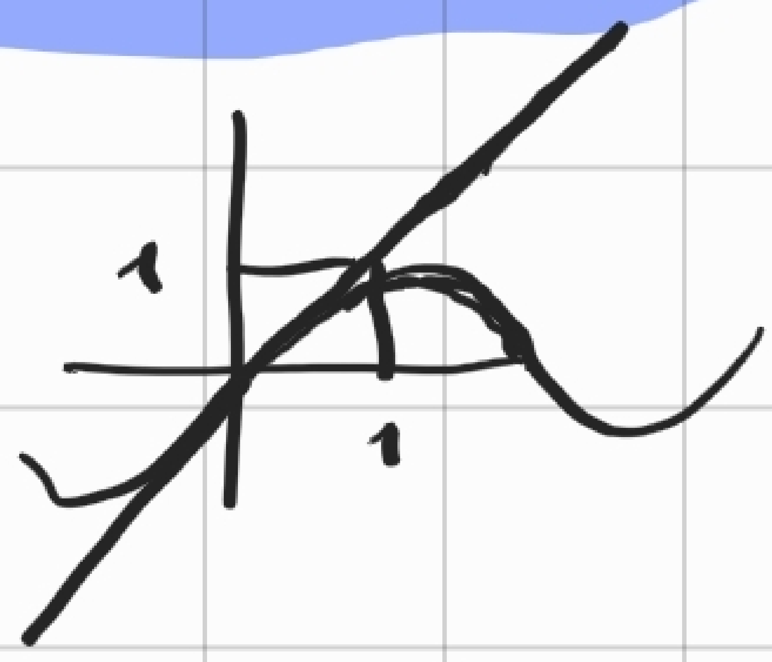
ANALISI MATEMATICA B

19.2.2021 LEZIONE 55

$$\boxed{\sum (-1)^k \left(\frac{1}{k} - \sin\frac{1}{k}\right)^\alpha} = \sum (-1)^k b_k^\alpha \qquad \boxed{a_k = (-1)^k b_k^\alpha}$$

per quali α è convergente?

$k \in \mathbb{N}$ $\quad \frac{1}{k} > 0$ $\qquad \boxed{\sin x < x}$ se $x > 0$



Serie a segni alterni $\qquad b_k = \frac{1}{k} - \sin\frac{1}{k}$

(1) convergenza assoluta $\sum |a_k|$

$$|a_k| = b_k^\alpha$$

Idea $\qquad b_k \sim c\,\frac{1}{k^n}$ $\qquad$ per $k \to +\infty$

$$\boxed{b_k = f\left(\frac{1}{k}\right)} \qquad f(x) = \boxed{x - \sin x}$$

$x = \frac{1}{k}$ $\qquad x \to 0$

$$b_k^\alpha \sim c^\alpha \frac{1}{k^{n\alpha}} \qquad \sum \frac{1}{k^{n\alpha}} \text{ converge}$$

$\Rightarrow$ se e solo se $n\alpha > 1$

(2) condizione necessaria per la convergenza $a_k \to 0$

$\Updownarrow$

$|a_k| \to 0$

$|a_k| = b_k^{\alpha} \sim c \frac{1}{k^{n\alpha}} \to 0$

$\Updownarrow$

$n\alpha > 0$

(3) convergenza semplice? $0 < n\alpha \leq 1$

posso applicare Leibniz?

$\sum (-1)^k b_k^{\alpha}$

è convergente se

b_k^{α} decrescente, infinitesima se $\alpha > 0$ $\quad b_k^{\alpha}$ è decrescente

$\Updownarrow$

$\underline{b_k}$ è decrescente

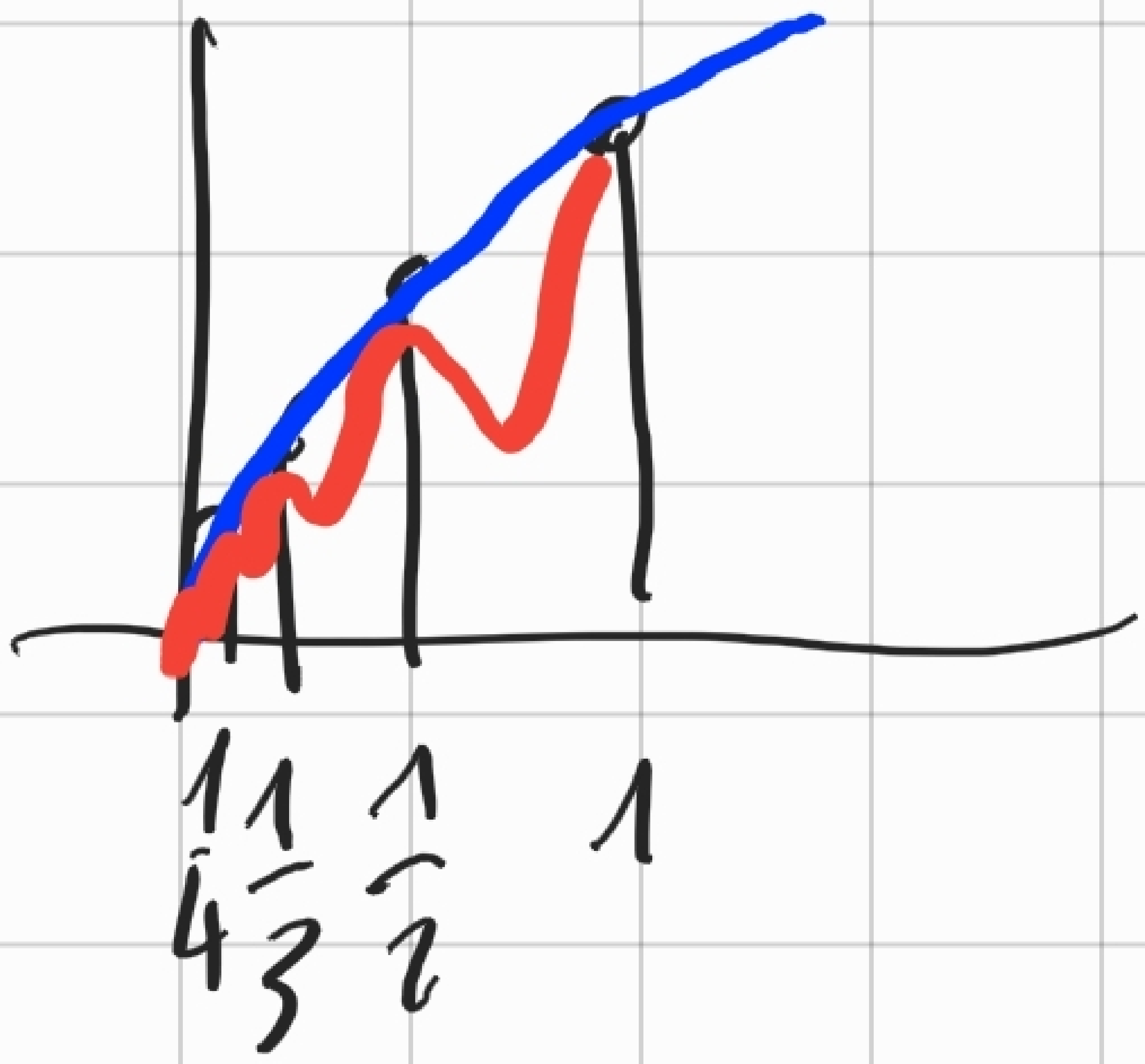
$\downarrow$

$b_k = f\left(\frac{1}{k}\right) \qquad f(x) = \cdots\cdots$

b_k è decrescente $\Leftarrow f$ crescente

$\Uparrow$

$f' \geq 0$



$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \text{ è convergente}$$

$\Updownarrow$

$$\sum_{k=n_0}^{+\infty} a_k \text{ è convergente}$$

$k \geq n_0$

$k \geq n_0 \quad x = \frac{1}{k} \quad 0 < x \leq \frac{1}{n_0} = \varepsilon$

Basta dire che $f'(x) \geq 0$

$\forall x \in (0, \varepsilon)$

Basta che $\lim_{x \to 0^+} f'(x) > 0$

$\Downarrow$

permanenza del segno

$\exists \varepsilon > 0$ t.c. $f'(x) > 0$

$\forall x \in (0, \varepsilon)$.

E se $f'(0) = 0$?

Vediamo cosa succede in questo caso.

$$f(x) = x - \sin x \underbrace{=}_{\text{per } x\to 0} x - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)$$

$$= \underbrace{\frac{x^3}{6}}_{\text{termine principale}} + o(x^3)$$

$$f(x) \sim \frac{x^3}{6} \qquad \text{per } x \to 0$$

in quanto

$$\frac{f(x)}{\frac{x^3}{6}} = \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{\frac{x^3}{6}} = 1 + \cancelto{0}{\frac{o(x^3)}{\frac{x^3}{6}}} \longrightarrow 1$$

$$b_k = f\left(\frac{1}{k}\right) \sim \frac{\left(\frac{1}{k}\right)^3}{6} = \frac{1}{6k^3}$$

per $k \to +\infty$

$$b_k^{\alpha} \sim \frac{1}{6k^{3\alpha}} \qquad \text{se } 3\alpha > 1 \quad \left(\alpha > \frac{1}{3}\right)$$

$|a_k| = b_k^{\alpha}$ $\quad \sum |a_k|$ ha lo stesso carattere di

$$\sum \frac{1}{6k^{3\alpha}} \quad \text{convergente}$$

Dunque, se $\alpha > \frac{1}{3}$, la mia serie

è assolutamente convergente.

Se $3\alpha \leq 0$ cioè $\alpha \leq 0$

$$|a_k| = b_k^{\alpha} \sim \frac{1}{6k^{3\alpha}} \to +\infty$$

per $k \to +\infty$

a_k non è infinitesima

la serie non è convergente

Se $0 < \alpha \leq \frac{1}{3}$ vorrei

applicare Leibniz. $\sum (-1)^k b_k^{\alpha}$

$b_k^{\alpha} \to 0$ ok!

b_k è decrescente? $b_k = f(\frac{1}{k})$

$f(x)$ è crescente, almeno in un

un intorno di 0^+?

$f'(x) \geq 0$ in un intorno di $\underline{\underline{0^+}}$?

$f(x) = x - \sin x$

$f'(x) = 1 - \cos x \geq 0 \quad \forall x$

f è crescente su tutto $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow b_k^\alpha$ decrescente ✓

$\Rightarrow$ la serie converge semplicemente ma non assolutamente

$\rightarrow f(x) = \frac{x^3}{6} + o(x^3)$?

$\hookrightarrow f'(x) = \frac{3x^2}{6} + o(\cancel{3}x^2)$

Posso dire che $\frac{d}{dx} o(x^n) = o(x^{n-1})$?

NO

Però posso dire che

$P(x) = \frac{x^3}{6}$ è il polinomio di Taylor

di f di ordine 3.

Se f' ha un polinomio di Taylor di ordine 2 (basta che $f \in C^2$)

Allora il polinomio di Taylor per f' di ordine 2

è $P'(x) = \frac{3x^2}{6} = \frac{x^2}{2}$.

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad ✓$$

No! $\geq 0 \quad \forall x$?

$\exists\, \varepsilon > 0$ t.c. $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (0, \varepsilon)$

SI!

$$f'(x) = \frac{x^2}{2} + o(x^2) = \frac{x^2}{2} \underbrace{\left(1 + \overbrace{\frac{o(x^2)}{\frac{x^2}{2}}}^{\to 0}\right)}_{\to 1}$$

$\exists\, \varepsilon > 0 \quad (\dots) > 0$ se $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$\Rightarrow \quad f'(x) > 0 \quad$ se $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

ovvero

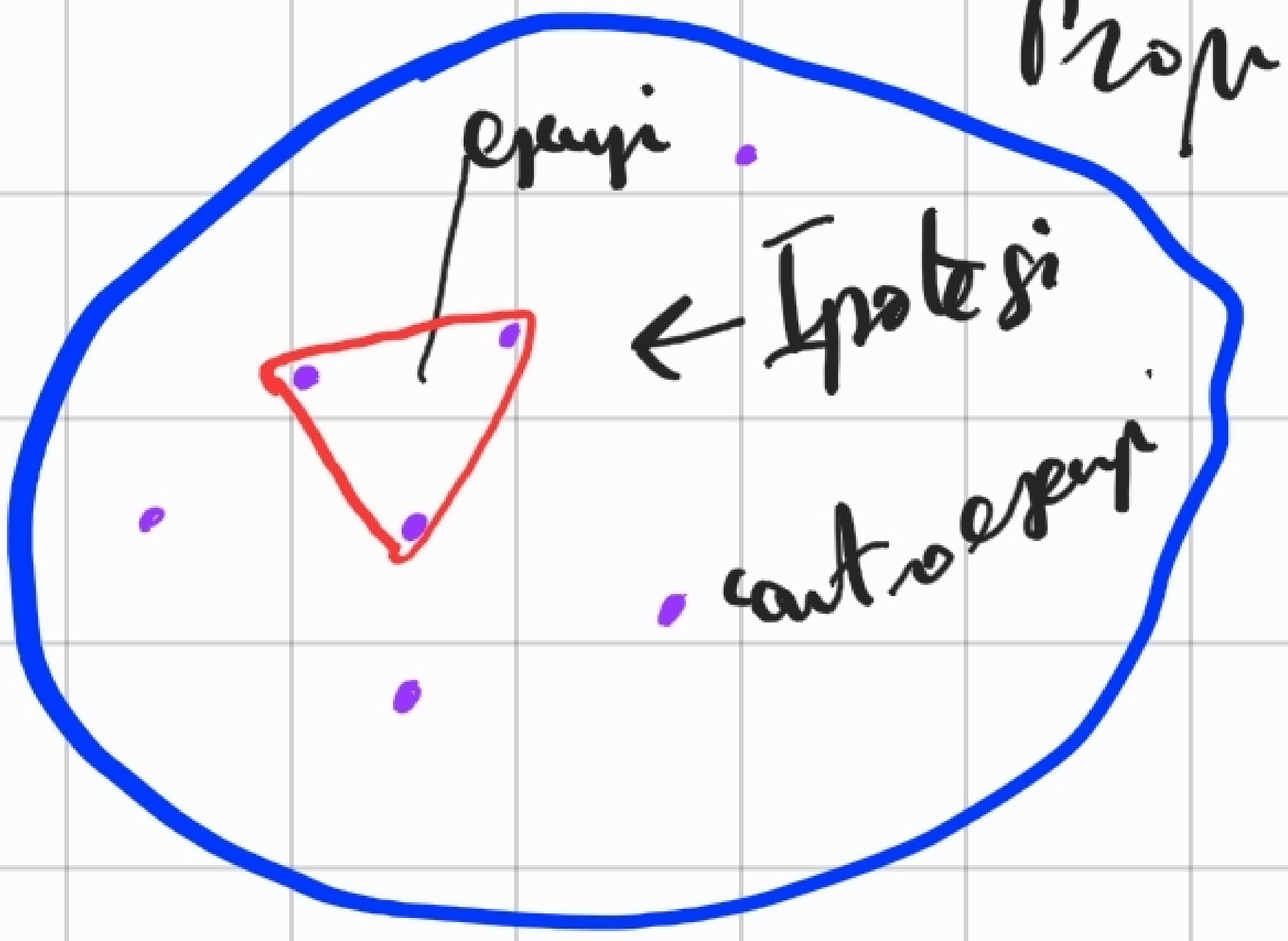
$$\frac{f'(x)}{\frac{x^2}{2}} = 1 + o(1) \longrightarrow 1$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell > 0 \Rightarrow \exists\, U \text{ intorno di } x_0 \text{ t.c. } f(x) > \frac{\ell}{2} \quad \forall x \in U.$$

Se $f(x) > 0$ in un intorno di x_0

Allora $\lim_{x \to x_0} f(x) \geq 0$.

Propietà dello [illegible] [illegible]



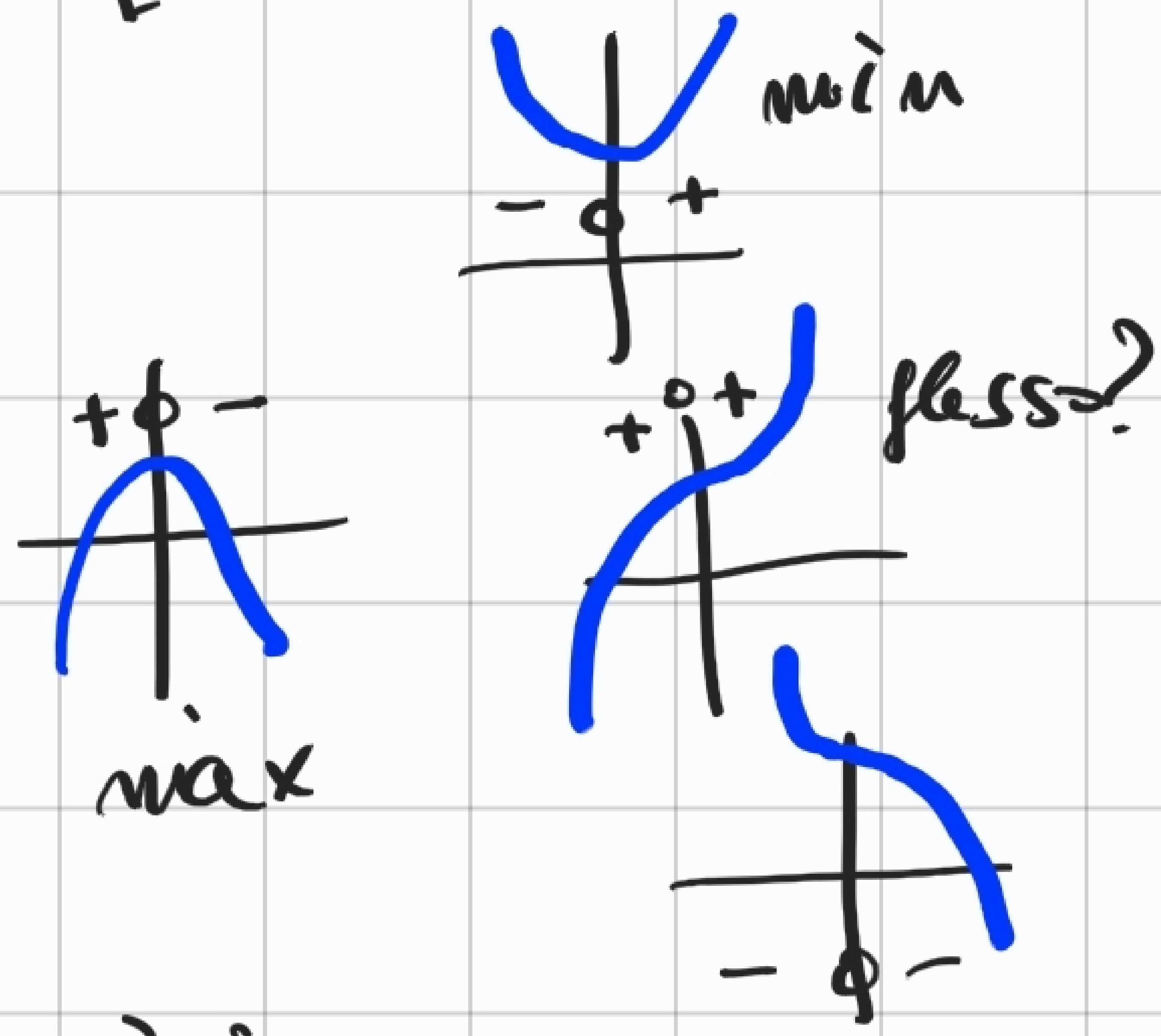
$$f(x) = \cos\left(\sin(x^2) - x^2\right)$$

$x_0 = 0$ è un punto critico? sì.

è un massimo o min? relativo?

$$f'(x) = -\sin\left(\sin(x^2) - x^2\right) \cdot \left[2x\cos(x^2) - 2x\right]$$

$$f'(0) = 0$$



Condizioni al secondo ordine:

se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$ → ho un minimo locale

se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$ → ho un massimo locale

$f''(x_0) = 0$

- $f'''(x_0) \neq 0$ → ne' max ne' min. (flesso)
- $f'''(x_0) = 0$
  - $f^{IV}(x_0) > 0$ MIN
  - $f^{IV}(x_0) < 0$ MAX

- - - -

$$f(x) = \cos\left(\sin(x^2) - x^2\right)$$

$x_0 = 0$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6)$$

$$y = \sin(x^2) - x^2 = \frac{x^6}{6} + o(x^6)$$

$y \sim x^6$

$y^2 \sim x^{12}$

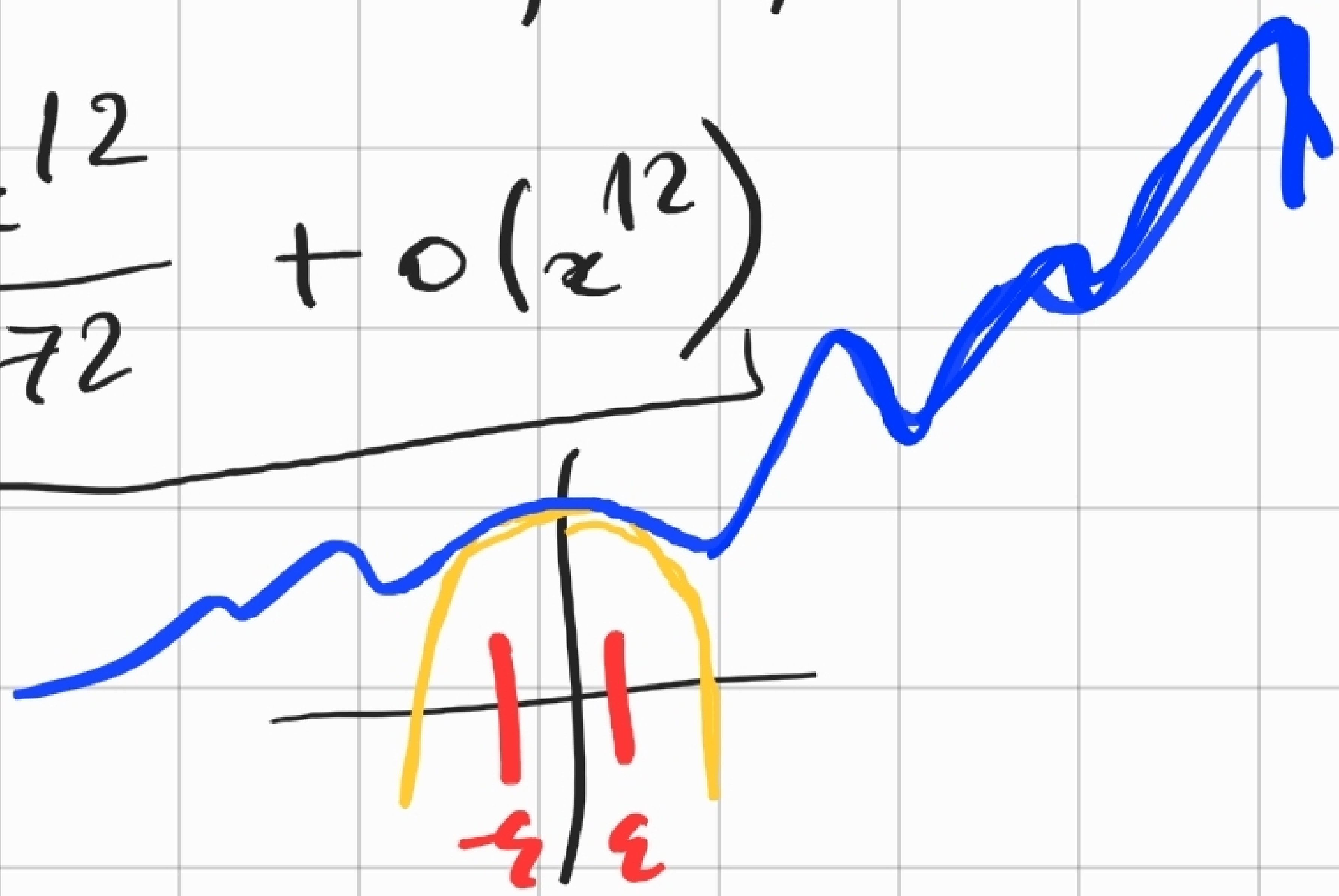
$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$$

$$f(x) = \cos y = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x^6}{6} + o(x^6)\right)^2 + o\left(x^{12}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\,\frac{x^{12}}{36} + o(x^{12})$$

$f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = 0$, ..., $f^{XI}(0) = 0$.

$$f(x) = 1 - \frac{x^{12}}{72} + o(x^{12})$$



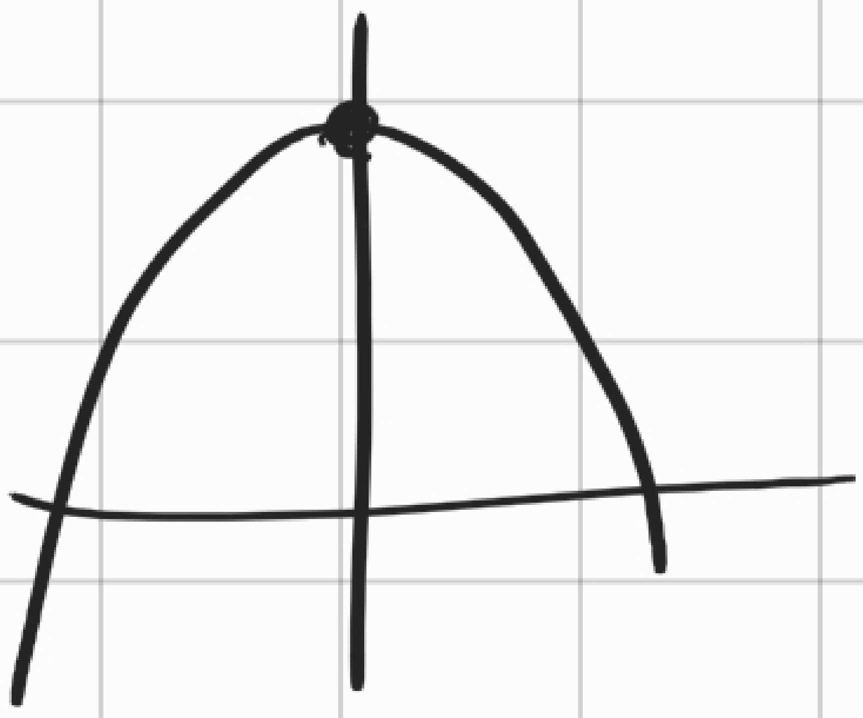
$$f(x) - 1 = \underbrace{x^{12}}_{\substack{\text{positivo} \\ \text{se } x \neq 0}} \underbrace{\left(-\frac{1}{72} + \underbrace{\cancel{\frac{o(x^{12})}{x^{12}}}}_{0} \right)}_{\substack{\text{è negativo in} \\ \text{un opportuno intorno} \\ \text{di } x_0 = 0}}$$

$\exists\, \varepsilon > 0$

$f(x) - 1 < 0$ in un intorno $(-\varepsilon, \varepsilon)$ se $x \neq 0$

$f(x) < 1 = f(0)$

$x_0 = 0$ punto di massimo stretto locale $\square$



$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$

$\uparrow$

x_0 punto di massimo relativo per f.

$$f(x) \leq 1 \iff f(x) - 1 \leq 0$$

$$f(x) = 1 - \underbrace{x^{12} \underbrace{\left(\frac{1}{72} + o(1) \right)}}$$

$< 1 \quad$ se $x \in (-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\}$

$$\boxed{\frac{o(x^2)}{x^3 + o(x^3)}}$$

$$\frac{x^4}{x^3} \to 0$$

$$\frac{\sqrt{x} \cdot x^2}{x^3} \to \infty$$

$$\frac{d}{dx} \frac{o(x^4)}{\quad} = ??$$

$$\frac{\ln x}{x} \qquad x \to +\infty \qquad \boxed{\frac{*}{\infty}}$$

$$\ln\left(x^3 + o(x^3)\right) = \ln\left(x^3 \cdot (1 + o(1))\right)$$

$\boxed{x \to 0}$

$$= 3 \ln x + \ln(1 + o(1))$$

$$= 3 \ln x + o(1)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(x^3+o(x^3)\right)}{\ln x}$$

---

255 Giusti $x\to 0^+$

$$\frac{\ln(1-\cos 2x)}{\ln \operatorname{tg} 2x} = (*)$$

$$\cos(2x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2)$$

$$1-\cos(2x) = 2x^2 + o(x^2)$$

$$\ln(1-\cos 2x) = \ln\left(2x^2 + o(x^2)\right)$$

$$= \ln\left(2x^2\cdot(1+o(1))\right)$$

$$= \ln 2 + 2\ln x + \ln(1+o(1))$$

$$= \ln 2 + 2\ln x + o(1)$$

$$\ln \operatorname{tg} 2x = \ln\left(2x + o(x)\right) = \ln\left(2x\cdot(1+o(1))\right)$$

$$= \ln 2 + \ln x + o(1)$$

$$(*) = \frac{\ln 2 + 2\ln x + o(1)}{\ln 2 + \ln x + o(1)} = \frac{\cancel{\ln x}}{\cancel{\ln x}} \frac{\frac{\ln 2}{\ln x} + 2 + \frac{o(1)}{\ln x}}{\frac{\ln 2}{\ln x} + 1 + \frac{o(1)}{\ln x}}$$

$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$

$\longrightarrow 2$

$$\frac{\ln(1-\cos 2x)}{\ln \operatorname{tg} 2x} \overset{H}{\longrightarrow} \frac{\frac{2\sin 2x}{1-\cos 2x}}{\frac{2}{(\operatorname{tg} 2x)(1+(2x)^2)}}$$

$$f(x) = P(x) + o(x^n)$$

se $\deg P \le n$
se $f \in C^n$

$\Downarrow$

P è il pol. di Taylor per f di ordine n per $x \to 0$.

$\Downarrow$

P' è il pol. Taylor per f di ordine $n-1$

$\Downarrow$

$$f'(x) = P'(x) + o(x^{n-1})$$

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x^{100}}\right) \cdot x^3 = o(x^2)$$

$$f(x) = 0 + o(x^2)$$

$$f'(x) = o(x)$$

???

$$\sin x = x + o(x) \sim x$$

$$\frac{\sin x}{x\cos x} \sim \frac{x}{x\cos x} = \frac{1}{\cos x}$$

$$f(x) \sim g(x)$$

$$e^{f(x)} \overset{??}{\sim} e^{g(x)}$$

$$f(x) = g(x) + o(g(x))$$

$$e^{f(x)} = e^{g(x)+o(g(x))}$$

$$= e^{g(x)}\, e^{o(g(x))}$$

$$a_n = n^{\frac{1}{\ln n}} - \sqrt[n]{n!}$$

$$\ln \sqrt[n]{n!} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln k$$

$$\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$$

$$= \frac{(n+1)}{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to e$$

$$b_n = \frac{n!}{n^n}$$

$$\sqrt[n]{b_n} \to \frac{1}{e}$$

$$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \sim \frac{1}{e}$$

$$\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e}$$

$$a_n = n^{\frac{1}{\ln n}} - \frac{n}{e} \cdot \frac{\sqrt[n]{n!}}{\frac{n}{e}}$$

$$= n \left[n^{\frac{1}{\ln n} - 1} - \frac{1}{e} \left(- \right) \right]$$

$$= n \left[e^{\ln n \left(\frac{1}{\ln n} - 1\right)} - \frac{1}{e} \left(\sim \right) \right]$$

$$= n \left[e^{1 - \ln n} - \frac{1}{e} \left(\ldots \right) \right]$$

$$= n \left[\cancelto{0}{\frac{e}{n}} - \frac{1}{e} \cancelto{1}{\left(\ldots \right)} \right]$$

$$a_n \sim -\frac{n}{e}$$