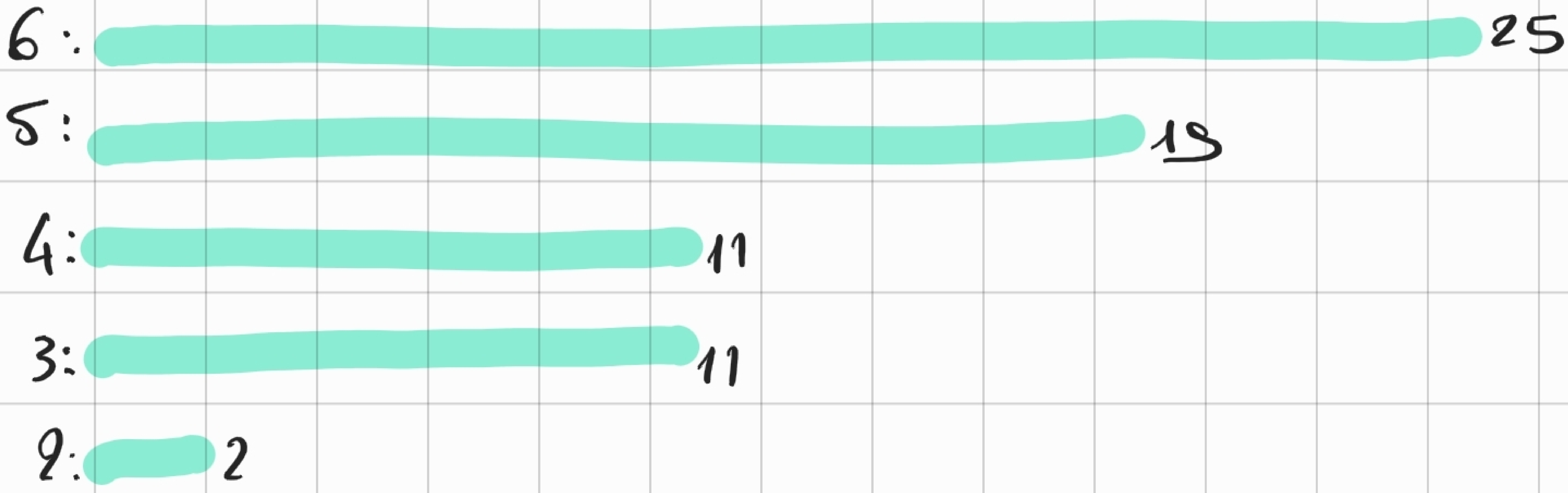
ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 50 – 8.2.2021

test settimanale



Teorema (formula di Taylor)

Se f è sufficientemente regolare in un intorno di x_0: se P polinomio di Taylor di ordine n per f centrato in x_0 allora:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P(x)}{(x-x_0)^n} = 0} \qquad (*)$$

Viceversa se P è un polinomio di grado $\deg P \leq n$ che verifica $(*)$ allora P è il polinomio di Taylor.

dim (del viceversa).

Se Q è un polinomio con $\deg Q \leq n$ che soddisfa (*) come il polinomio di Taylor P allora:

$$\frac{\big(f(x)-P(x)\big)-\big(f(x)-Q(x)\big)}{(x-x_0)^n} \longrightarrow 0$$

$$\| $$

$$\frac{Q(x)-P(x)}{(x-x_0)^n} \qquad \text{Posto } R(x)=Q(x)-P(x)$$

$$R(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n$$

per $x \to x_0$

se $\frac{R(x)}{(x-x_0)^n} \to 0$ $\qquad R(x) \to 0 \qquad a_0 = 0$

$$R(x) = (x-x_0)\left[a_1 + a_2(x-x_0) + \dots + a_n(x-x_0)^{n-1}\right]$$

$$\frac{R(x)}{(x-x_0)^n} \to 0 \qquad \frac{a_1 + a_2(x-x_0) + \dots + a_n(x-x_0)^{n-1}}{(x-x_0)^{n-1}}$$

allora anche $a_1 = 0$

. . . . $\qquad a_2 = 0$

$\vdots$

$a_n = 0$ $\qquad \square$

Es $\quad \dfrac{\cancel{x^2}-\cancel{x}+\cancel{1}}{x^2} \to 0$

Sono equivalenti:

(1) $P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ $\quad$ per noi è la definizione

(2) $P^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ $\quad$ per $k=0,1,\dots,n$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-P(x)}{(x-x_0)^n} = 0$

Notazione degli o-piccolo.

Scriviamo che $\boxed{f = o(g)}$ per $x \to x_0$

se $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0}$

(ovvero $f << g$ per $x \to x_0$)

Formalizzazione:

$$f \in o(g)$$

$$o(g) = \left\{ \text{tutte le funzioni } h : \frac{h(x)}{g(x)} \to 0 \text{ per } x \to x_0 \right\}$$

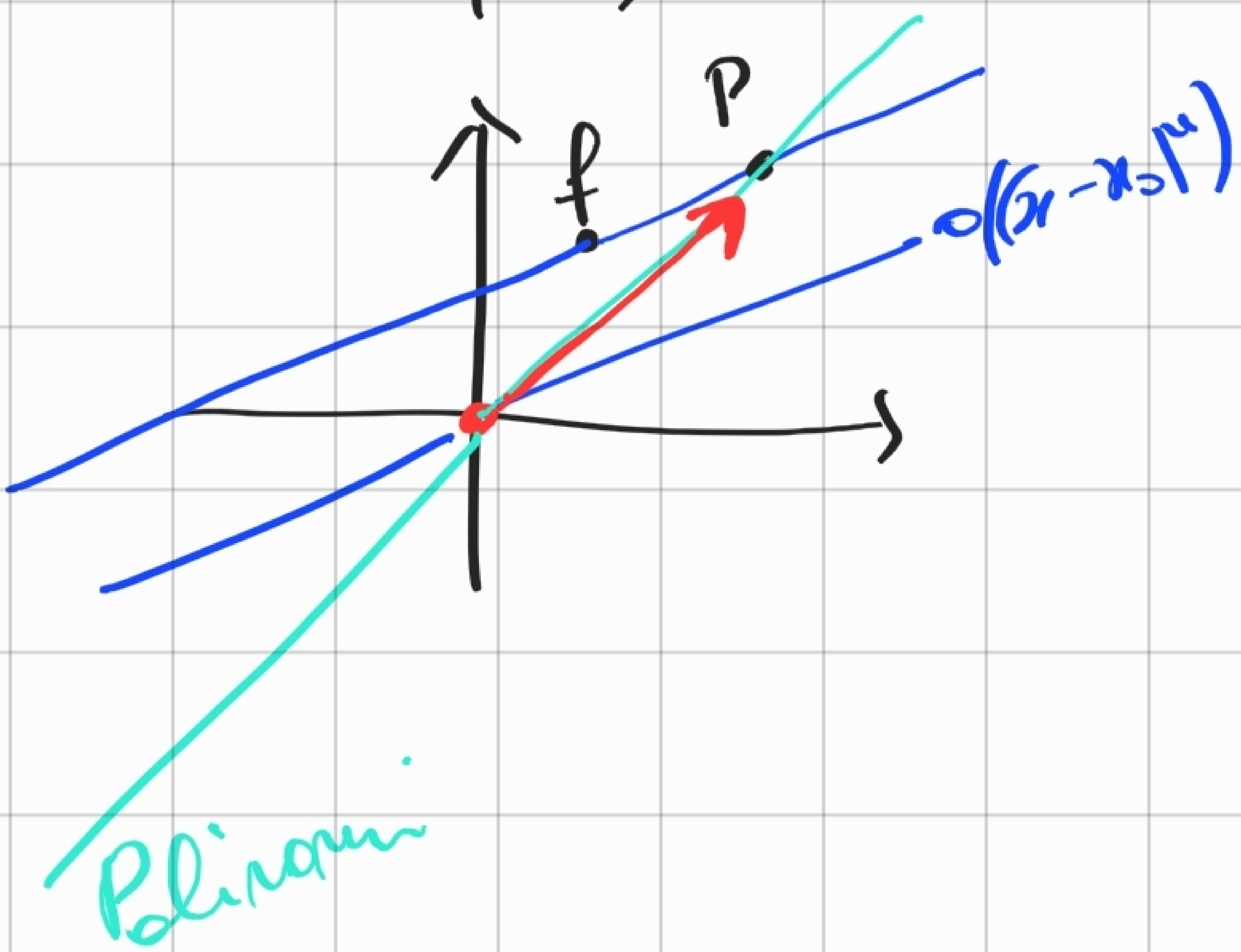
Oss $o(g)$ è uno spazio vettoriale reale

Formula di Taylor:

$$f - P \in o((x-x_0)^n)$$

Si scrive:

$$f(x) \overset{\in}{=} P(x) + o((x-x_0)^n)$$



Se $x_0 = 0$ Se $n \geq m$ $o(x^n) \subseteq o(x^m)$

dimostro che $o(x^n) \subseteq o(x^m)$ se $n > m$.

Se $h \in o(x^n)$ $\qquad$ $h \in o(x^m)$

$\Downarrow$ $\qquad\qquad\qquad$ $\Uparrow$

$$\frac{h(x)}{x^n} \to 0 \Rightarrow \frac{h(x)}{x^m} = \overset{\to 0}{\frac{h(x)}{x^n}} \cdot \overset{\to 0}{x^{n-m}} \longrightarrow 0$$

Allora $o(x^n) + o(x^m) = o(x^m)$ se $n > m$.

$$f(x) = P(x) + (f(x) - P(x))$$

$\underline{Es}$ $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ $\boxed{\text{per } x \to 0}$

è meno preciso che scrivere: $a(x)$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \left(\sin x - x + \frac{x^3}{6}\right)$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + a(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\sin x - \cos x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - 1 + \frac{x^2}{2} - o(x^2)$$

$$= -1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \underbrace{o(x^3) - o(x^2)} =$$

$[$ $-o(x^2) = o(x^2)$

$o(x^3) \subseteq o(x^2)$ $\quad o(x^3) - o(x^2) = o(x^2)$ $]$

$$= -1 + x + \frac{x^2}{2} \cancel{- \frac{x^3}{6}} + o(x^2)$$

$$-\frac{x^3}{6} \in o(x^2)$$

$$\Rightarrow -\frac{x^3}{6} + o(x^2) \subseteq o(x^2)$$

$\underline{Es}$

$2o(x^2) = o(x^2)$

$\underline{Es}$

$o(x^2) - o(x^2) = o(x^2)$

$$\boxed{\sin x - \cos x \overset{\in}{=} -1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}$$

Deduco anche che $-1 + x + \frac{x^2}{2}$ è il polinomio di Taylor di ordine 2 per la funzione $\sin x - \cos x$ (centrato in $x_0 = 0$).

$$o(x^3) - o(x^2) \subseteq o(x^2)$$

<u>formalmente</u>:

$$\sin x - \cos x \in -1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - o(x^2)$$
$$\subseteq -1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^2)$$
$$\subseteq -1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

<u>Esempio</u> $\sin x \overset{\in}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \overset{\subseteq}{=} x + o(x^2)$

$$\sin x \overset{\in}{=} x + o(x^2)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\sin x - \cos x = -1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

ES $(\sin x)\cdot(\cos x) \overset{\in}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\cdot\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)$

$$= x - \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{12} + o(x^3) - o(x^3)\frac{x^2}{2} + o(x^3)\,o(x^2) + \dots$$

Come si trattano i prodotti con gli o-piccoli?

$$\boxed{f\cdot o(g) \underset{=}{\overset{\subseteq}{\supseteq}} o(f\cdot g)} \ni h$$

$\Downarrow$

$h = f\cdot a,\ \frac{a}{g} \to 0 \Rightarrow \frac{h}{f\cdot g} = \frac{\cancel{f}\cdot a}{\cancel{f}\cdot g} = \frac{a}{g} \to 0$

se $h \in o(f\cdot g) \Rightarrow \frac{h}{f\cdot g} \to 0$

$\Downarrow$

$h = f\cdot\frac{h}{f}$ $\qquad \frac{\frac{h}{f}}{g} = \frac{h}{f\cdot g} \to 0$

$h \in f\cdot o(g) \Leftarrow \frac{h}{f} \in o(g)$

$o(f) = f\cdot o(1)$. $\qquad o(1) = \{\text{infinitesimi}\}$

$$o(f)\cdot o(g) \subseteq o(f\cdot g)$$

$a\cdot b$ con $\frac{a}{f} \to 0,\ \frac{b}{g} \to 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{a \cdot b}{f \cdot g} = \frac{a}{f} \cdot \frac{b}{g} \to 0 .$$

Esercizio (ambiguità) $\quad o(f \cdot g) \subseteq o(f) \cdot o(g)$.
(potrebbe essere complicato).

ES
$$(\sin x)(\cos x) \in \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)$$

$$= x - \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{12} + o(x^3) - o(x^3)\frac{x^2}{2} + o(x^3)\,o(x^2)$$

$$= x - \frac{2}{3}x^3 + \cancel{\frac{x^5}{12}} + o(x^3)$$

Potremmo trovare subito il risultato

$$= \underbrace{x - \frac{2}{3}x^3}_{} + o(x^3)$$

↳ è il polinomio di Taylor di ordine 3 per $f(x) = \sin x \cos x$.

Es:

$$-\frac{2}{3} = \frac{f^{(3)}(0)}{3!} \qquad f^{(3)}(0) = -4.$$

Es $\cos(\sin x) = ?$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad \text{per } x \to 0$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{se } x \to 0$$

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + o(y^2) \quad \text{se } y \to 0$$

se $y = \sin x$ se $x \to 0$ $\sin x \to 0$

$$\cos(\sin x) = 1 - \frac{(\sin x)^2}{2} + o\left(\sin^2 x\right)$$

$$\sin^2 x = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)$$

$$= x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

$$o\left(\sin^2 x\right) = o\left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right) \subseteq o(x^2)$$

Verifica: se $h \in o\left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right)$

$$\Downarrow$$

$$\frac{h(x)}{x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)} \to 0 \qquad h \in o(x^2).$$

$$\frac{h(x)}{x^2\left(1 - \cancel{\frac{x^2}{3}} + o(\cancel{x^2})\right)} = \frac{h(x)}{x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)} \implies \frac{h(x)}{x^2} \to 0$$

$\to 0$ $\quad$ $\to 0$

$$\left[\begin{array}{ll} \text{se } f \sim g & \text{per } x \to x_0 \\ \text{allora} & o(f) = o(g) \end{array}\right] \qquad \frac{h}{f} = \frac{h}{g} \cdot \frac{f}{g}$$

$$\downarrow$$

$$1$$

$$x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4) \sim x^2$$

$$\Uparrow$$

$$\frac{x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)}{x^2} = 1 - \cancel{\frac{x^2}{3}}^{\,0} + \cancel{o(x^2)}^{\,0}$$

$$\longrightarrow 1$$

torniamo all'esercizio:

$$\cos(\sin x) = 1 - \frac{(\sin x)^2}{2} + o\left(\sin^2 x\right)$$

$$= 1 - \frac{x^2 - \cancel{\frac{x^4}{3}} + \cancel{o(x^4)}}{2} + o(x^2)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

O-grande

$f(x) \in O(g)$ per $x \to x_0$

se $\limsup_{x \to x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < +\infty$

Oss se $f \in o(g) \Rightarrow f \in O(g)$

$o(g) \subseteq O(g)$

ovvero $\exists\, C$! $\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \le C$ $\forall x$ in un intorno di x_0.

Es 4. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - (\cos(x^7))^5}{x^{14}}$

$$\boxed{\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)}$$

$f(x) = \cos(x^7) = 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots$ per $x \to 0$

$f'(x) = -\sin(x^7) \cdot 7x^6$

$f''(x) = -\cos(x^7) \cdot 7x^6 \cdot 7x^6 - \sin(x^7) \cdot 42 \cdot x^5$

$f'''(x) = \dots\dots\dots$

...

$$\cos(x^7) = 1 - \frac{(x^7)^2}{2} + o((x^7)^2)$$

$$= 1 - \frac{x^{14}}{2} + o(x^{14})$$

$1 - \frac{x^{14}}{2}$ è il pol. di Taylor. di ordine 14 per $\underbrace{\cos(x^7)}_{y}$.

$$\frac{1-(\cos(x^7))^5}{x^{14}} = \frac{1-\left(1-\frac{x^{14}}{2}+o(x^{14})\right)^5}{x^{14}} = (*)$$

$$\left[(1+y)^5 = 1+5y+10y^2+10y^3+5y^4+y^5 \right.$$
$$\left. = 1+5y+o(y) \right]$$

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

$$(*) = \frac{\cancel{1} - \left(\cancel{1}+5\left(-\frac{x^{14}}{2}+o(x^{14})\right)+o(x^{14})\right)}{x^{14}}$$

$$= \frac{\frac{5}{2}x^{14} + o(x^{14})}{x^{14}} = \frac{5}{2} + \frac{o(x^{14})}{x^{14}} \longrightarrow \frac{5}{2}$$

$\frac{o(x^{14})}{x^{14}} \to 0$

□