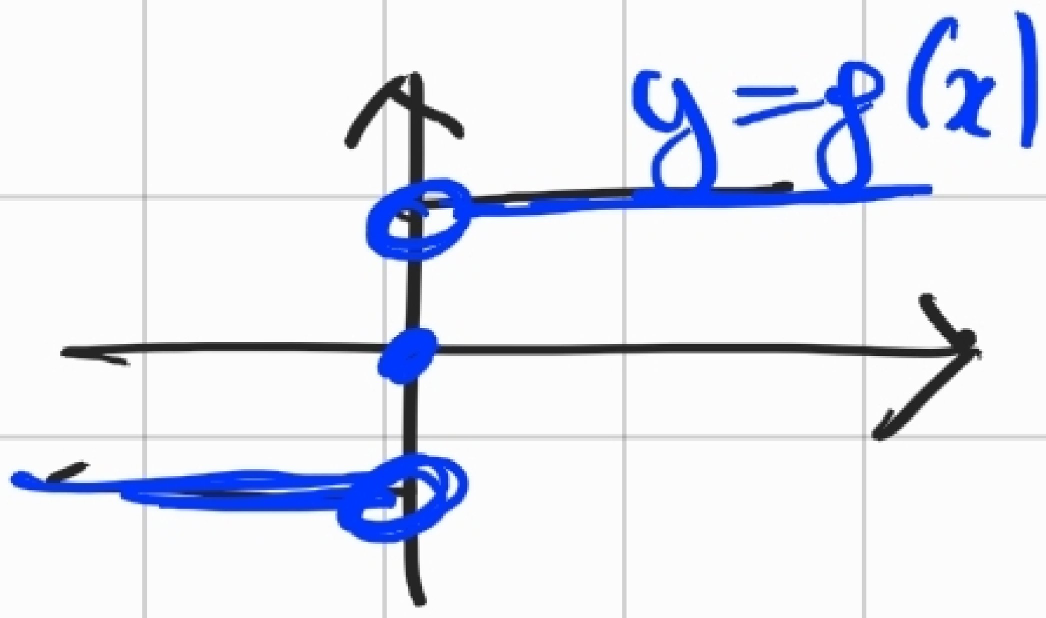
ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 48 - 3.2.2021

Propietà di Darboux: Se f è derivabile su un intervallo I allora la derivata $f' : I \to \mathbb{R}$ soddisfa la propietà (di Darboux) dei valori intermedi.

ES

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

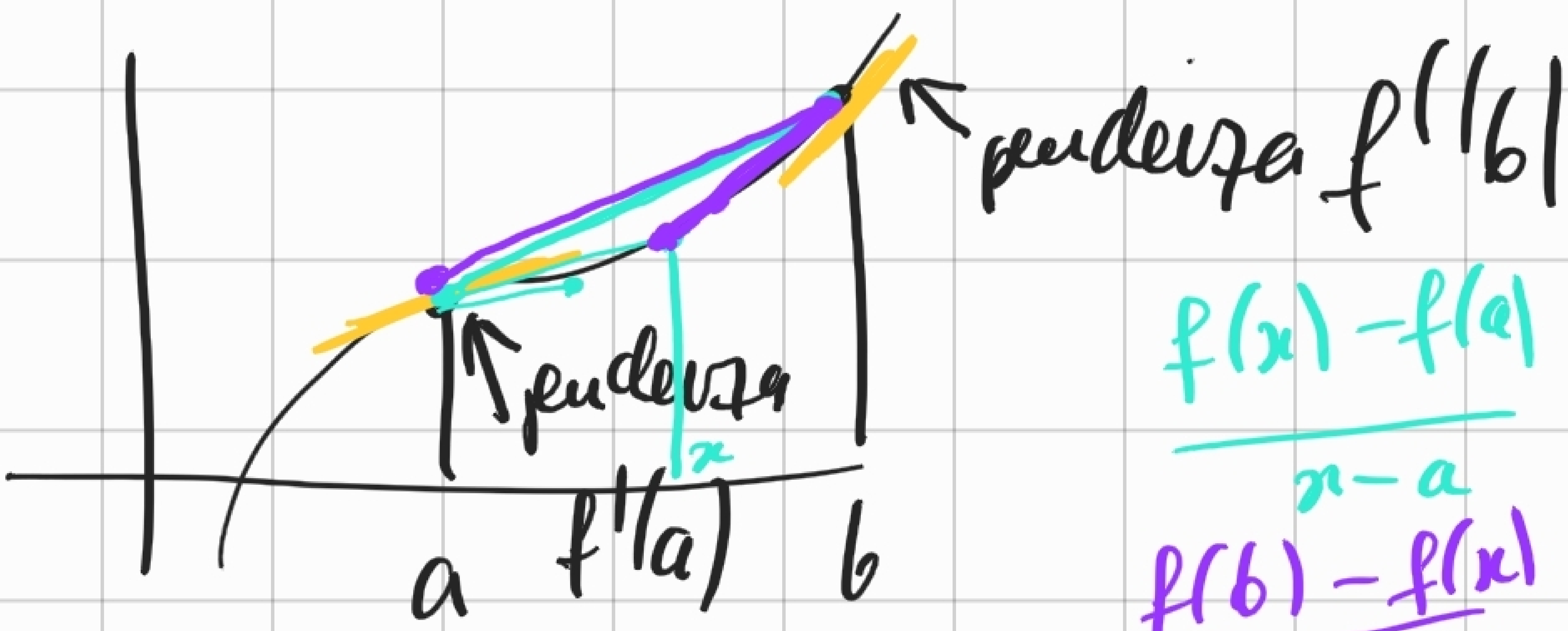


non esiste $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$f'(x) = g(x).$$

Esercizio dimostrare che g non è una derivata.

idea di dimostrazione di Darboux



$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(y)$$

$$\frac{f(b)-f(x)}{b-x}$$

$\square$

Polinomi di Taylor

<u>Def</u> Se f è derivabile n volte nel punto x_0 definiamo il polinomio di Taylor per f <u>centrato</u> nel punto x_0 di ordine n:

$$\boxed{P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}$$

$$f \quad f' \quad f'' \quad f''' \quad f^{IV} \quad f^{V} \ldots \quad f^{(k)}$$

$f = f^{(0)}$, $f' = f^{(1)}$, $f^{(k)}$: derivata k-esima.

<u>Esempio</u>

- $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$, $n = 5$

$$P(x) = \sum_{k=0}^{5} \frac{1}{k!} x^k = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}.$$

- $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$, $n = 3$

$$f(x) = \ln x \qquad f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$
$$f'(x) = \frac{1}{x} \qquad f'''(x) = \frac{2}{x^3} \quad \ldots$$

$$P(x) = \frac{0}{0!}(x-1)^0 + \frac{1}{1!}(x-1)^1 + \frac{-1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3$$

$$= 0 + \underbrace{(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3}}$$

$$= x - 1 - \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2} + \frac{x^3}{3} - x^2 + x - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 3x - \frac{11}{6}$$

Oss Per avere $f^{(n)}(x_0)$

$$f^{(n)}(x_0) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}$$

$f^{(n-1)}$ deve essere definita in un intorno di x_0.

$f^{(n-2)}$ " " " "

$\vdots$ " " " "

f' " " " "

f

Th (caratterizzazione del Polinomio di Taylor)

Il polinomio di Taylor è l'unico polinomio P di grado $\leq n$ tale che:

$$P^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \quad \text{per } k = 0, 1, \dots, n$$

dim

Se

$$\begin{cases} P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot (x - x_0)^k \\ P'(x) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot a_k (x - x_0)^{k-1} \\ P''(x) = \sum_{k=2}^{n} k \cdot (k-1)\, a_k (x - x_0)^{k-2} \end{cases}$$

$$\boxed{(x - x_0)^0 = 1}$$

se $j \leq n$
$$\begin{cases} \vdots \\ p^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{n} \overbrace{k(k-1)\dots(k-j+1)}^{j} a_k (x-x_0)^{k-j} \\ \vdots \\ p^{(n)}(x) = n!\, a_n \end{cases}$$

se $j > n$ $\quad p^{(j)}(x) = 0$

$$\left[\begin{array}{c} \sin'(0) = 1 \\ (\sin(0))' = 0 \end{array} \right]$$

$$p^{(j)}(x_0) = \begin{cases} j! \cdot a_j & \text{se } j \leq n \\ 0 & \text{se } j > n \end{cases}$$

$$p^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \underset{k \leq n}{\iff} a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \qquad \square$$

Osservazione Il polinomio di Taylor di ordine $n-k$ della derivata k-esima della funzione f è la derivata k-esima del polinomio di Taylor di ordine n.

$$\text{“} P_n^{(k)} \text{ di } f = P_{n-k} \text{ di } f^{(k)} \text{”}$$

Sia P il polinomio di Taylor di ordine n per f centrato in x_0:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

$$\frac{k}{k!} = \frac{1}{(k-1)!} \qquad P'(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot k\,(x-x_0)^{k-1}$$

$$j = k-1 \qquad = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j+1)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j$$

Sia Q il pol. di Taylor di f' centrato in x_0 di ordine $n-1$:

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(f')^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \qquad \square$$

<u>Teorema</u> (Formula di Taylor con resto di Peano)

Se f ......

e P è il polinomio di Taylor di f centrato in x_0 di ordine n allora:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

<u>Teorema</u> (Cauchy) Siano $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, derivabili su (a,b), $g'(x) \neq 0$ per $x \in (a,b)$. Allora $\exists\, x_0 \in (a,b)$ $g(b) \neq g(a)$

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

(Per Rolle $g(b) \neq g(a)$ altrimenti $\exists\, x_1 : g'(x_1) = 0$).

<u>dim</u> Devo mostrare che $\exists\, x_0$ tc:

$$g'(x_0)\big(f(b)-f(a)\big) - f'(x_0)\big(g(b)-g(a)\big) = 0$$

$$F'(x_0) = g'(x_0)\cdot\big(f(b)-f(a)\big) - f'(x_0)\big(g(b)-g(a)\big)$$

Se $F'(x_0) = 0$ allora vale

$$F(a) = g(a)\big(f(b)-\cancel{f(a)}\big) - f(a)\big(g(b)-\cancel{g(a)}\big)$$

$$F(b) = g(b)\big(\cancel{f(b)}-f(a)\big) - f(b)\big(\cancel{g(b)}-g(a)\big)$$

$F(a) = F(b)$ per Rolle $\exists\, x_0 : F'(x_0) = 0$ □

dim Sbagliata

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}}{\dfrac{g(b)-g(a)}{b-a}} = \frac{f'(x_1)}{g'(x_2)}$$

lagrange

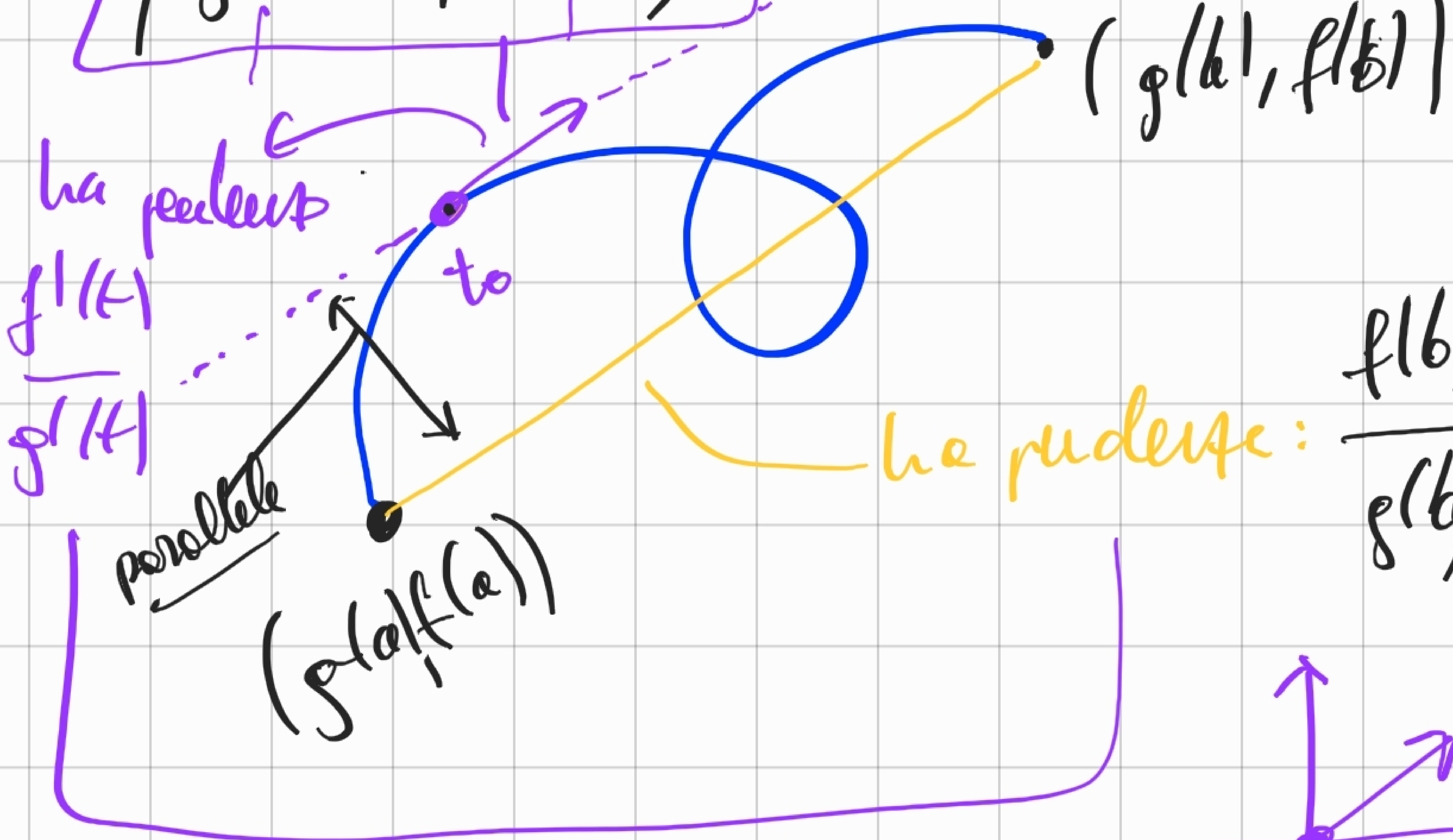
lagrange

$\exists\, x_1, x_2 \in (a,b)$

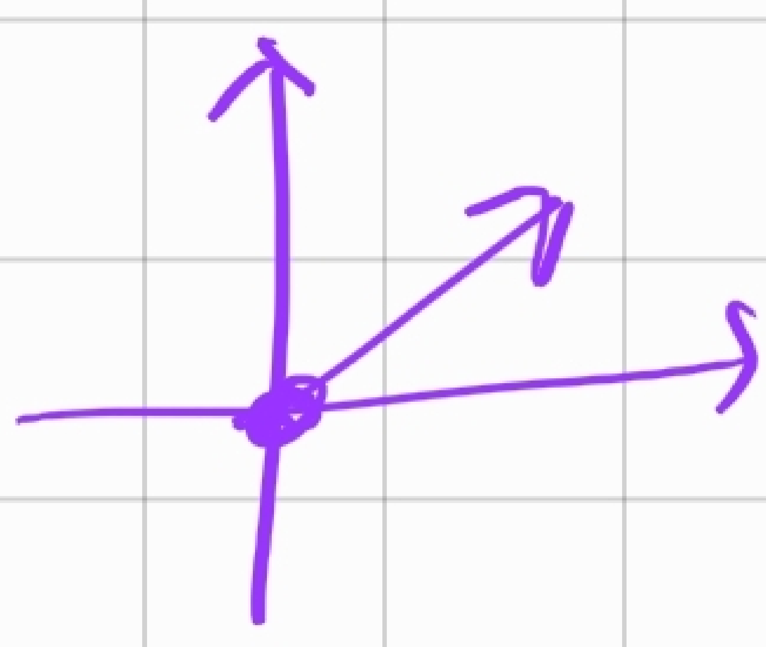
$(g(t), f(t))$

$$\begin{cases} x(t) = g(t) \\ y(t) = f(t) \end{cases}$$

$\boxed{(g'(t), f'(t))}$



$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$



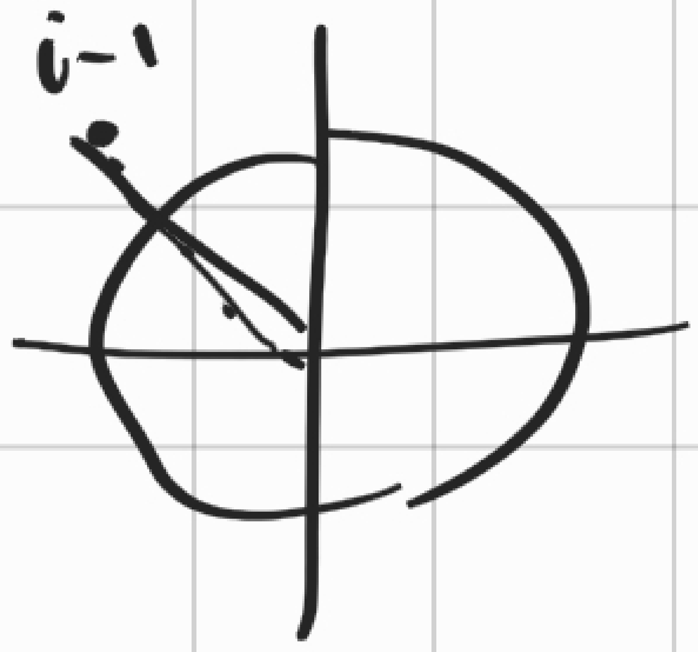
$$z|z| - 2z - i + 1 = 0$$

$$z = \rho e^{i\theta}$$

$$\rho e^{i\theta}\rho - 2\rho e^{i\theta} - i + 1 = 0$$

$$(\rho^2 - 2\rho)e^{i\theta} = i - 1$$

$$e^{i\theta} = \frac{i-1}{\rho^2 - 2\rho}$$



$$|e^{i\theta}| = 1$$

$$\frac{|i-1|}{\rho^2 - 2\rho} = 1 \qquad \rho^2 - 2\rho = \sqrt{2}$$

$$\rho^2 - 2\rho - \sqrt{2} = 0$$

$$\rho_{12} = 1 \pm \sqrt{1+\sqrt{2}}$$

$$\theta = \frac{3}{4}\pi \qquad z = \left(1 \pm \sqrt{1+\sqrt{2}}\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\left|\begin{array}{l} 1+\sqrt{2} \\ -1 \end{array}\right.$$