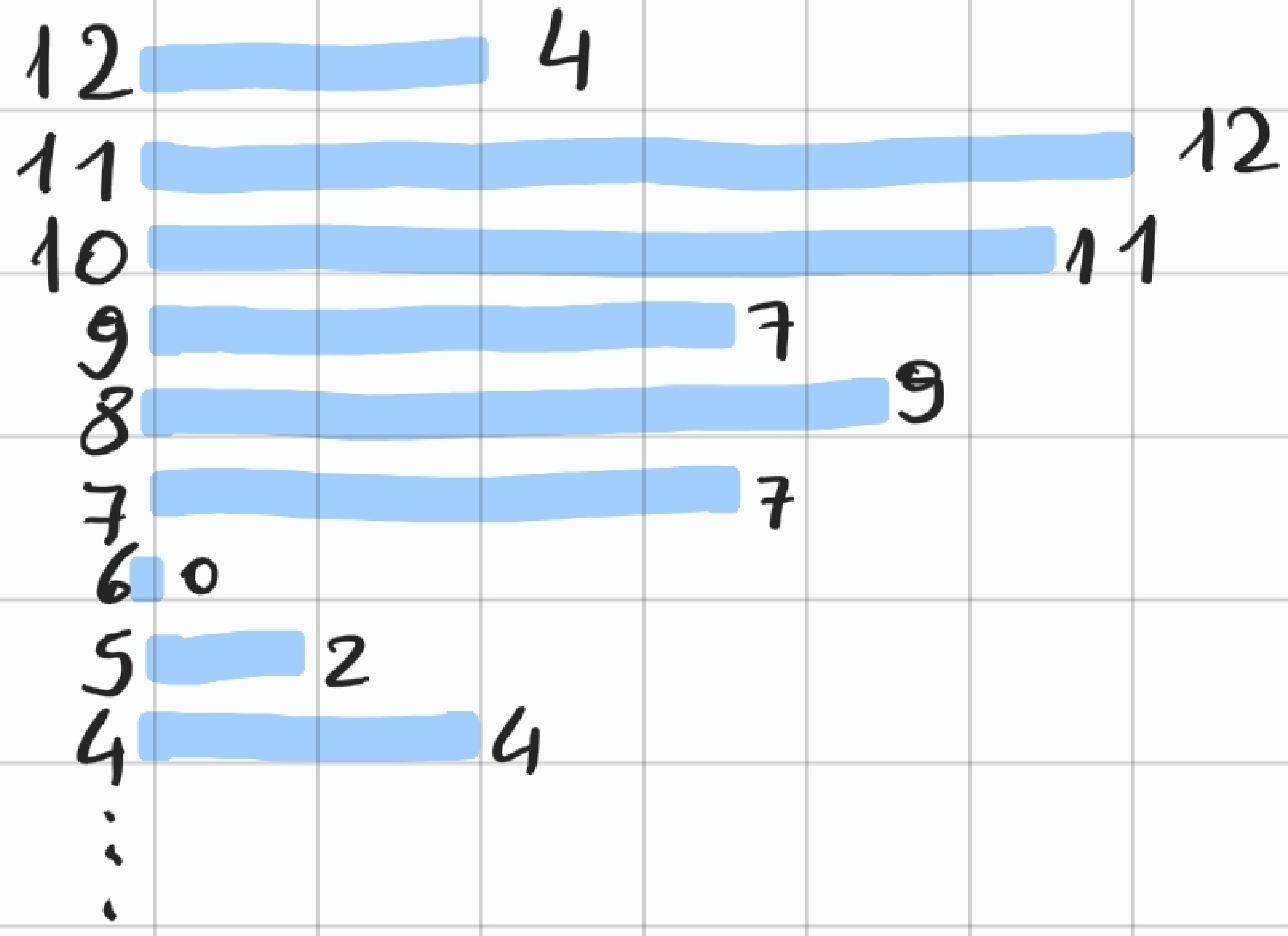
ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 47 — 1.2.2021

test settimanale



Esercizio 8 $\quad \{x>0 : \ln x > x^2-1\}$

$$= \{x>0 : f(x)>0\}$$

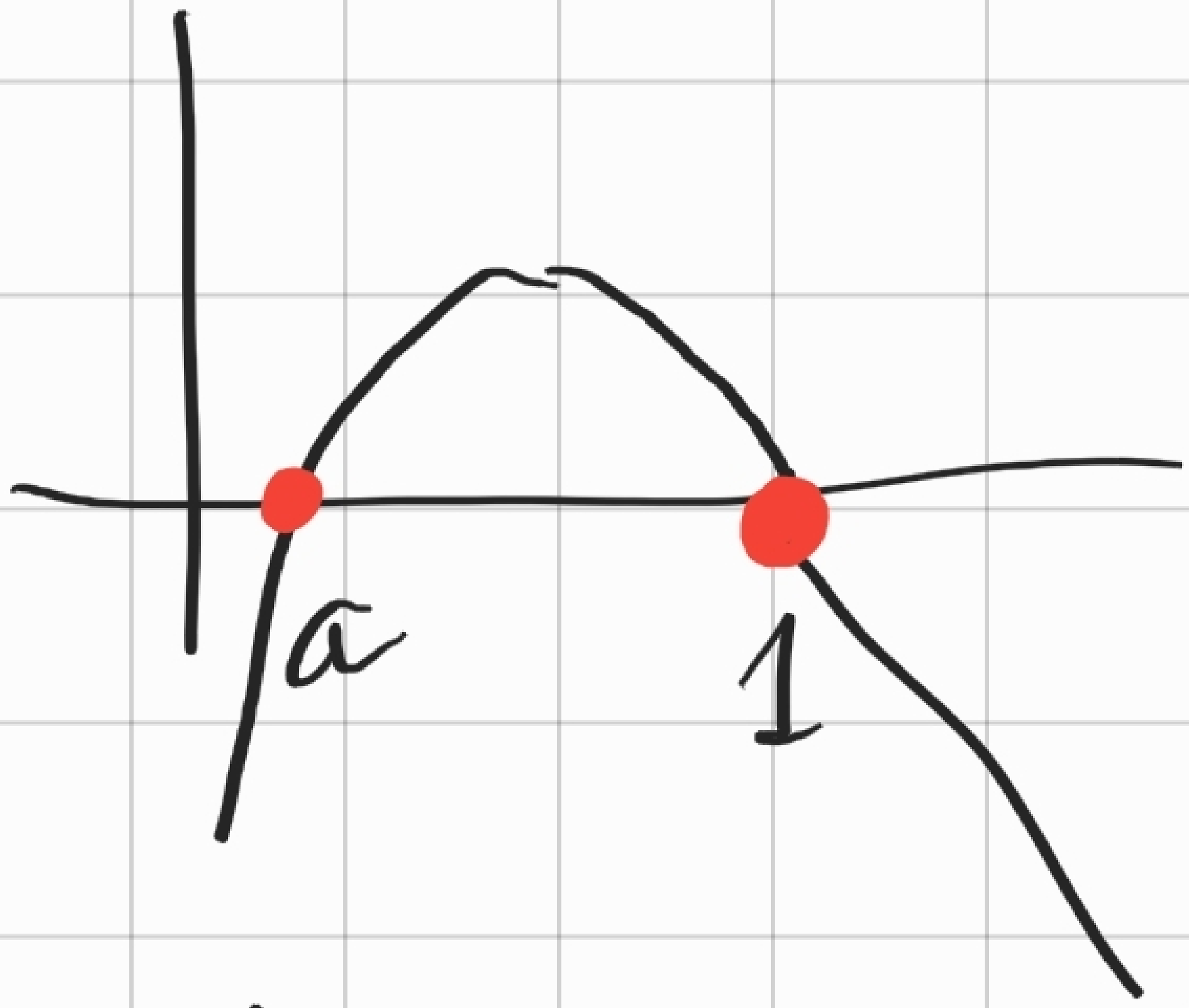
$$f(x) = \ln x - x^2 + 1 \qquad (x>0)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 2x > 0 \;\dots\dots\; x < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1	
f'		$+$	0	$-$	$-$	$-$
f	"$-\infty$"	$\nearrow$	max	$\searrow$	0	$\searrow$

$x \to 0^+ \quad f(x) \to -\infty$

$f(1) = 0 - 1 + 1 = 0$



$f(x) > 0 \iff x \in (a, 1)$.

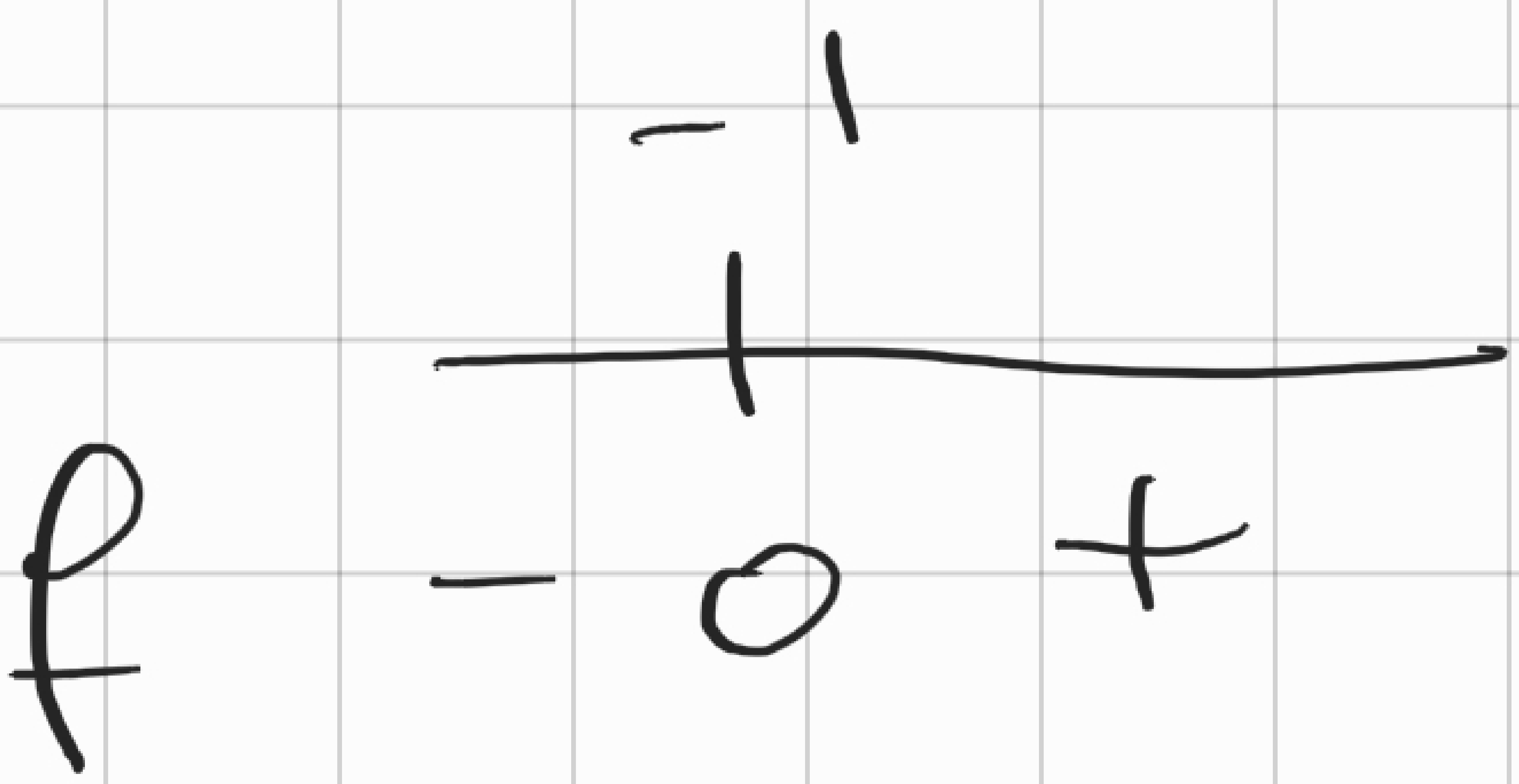
Esercizio 11

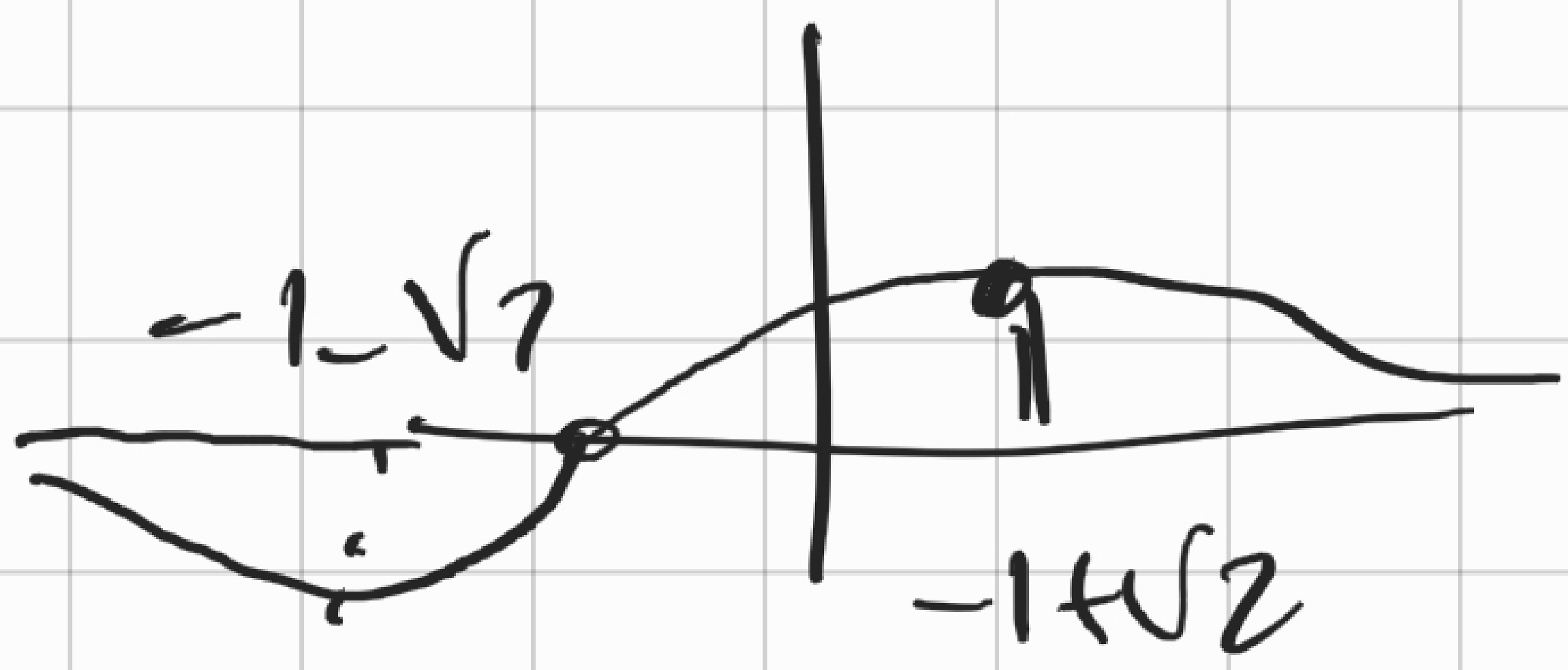
$f(x) = \dfrac{2x+2}{x^2+1}$

$\sup f = ?$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\lim_{x \to +\infty, -\infty} = 0$





$$f'(x) = \frac{2(x^2+1) - (2x+2)2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2x^2+2-4x^2-4x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-2x^2-4x+2}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-2(x^2+2x-1)}{(x^2+1)^2}$$

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+1} = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$f(-1+\sqrt{2}) = \frac{2(-1+\sqrt{2})+2}{(\sqrt{2}-1)^2+1}$$

$$= \frac{-2+2\sqrt{2}+2}{2-2\sqrt{2}+1+1} = \frac{2\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \cdot \frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}+2}{4-2}$$

$$= \sqrt{2}+1 . \qquad \square$$

<u>Esercizio 5</u> $f(x) = x + x^3 + x^7$

Dimostrare che $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è strettamente crescente biettiva $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con inversa f^{-1} derivabile.

$$f'(x) = 1+3x^7+7x^6 \geq 1 > 0$$

$\Rightarrow$ f è strettamente crescente

$\Downarrow$

f iniettiva

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

per il teorema dei valori intermedi

f assume ogni valore in $\mathbb{R}$.

cioè f è surgettiva.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bigettiva.

Per il teorema della

derivata della fn. inversa:

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}$$

diverso da zero

f^{-1} derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

Calcolare $\left(f^{-1}\right)'(3)$.

$$\left(f^{-1}\right)'(3) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(3)\right)}$$

$$f(x) = x + x^3 + x^7$$

$f(1) = 3 \qquad f^{-1}(3) = 1.$

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{1+3+7}$$

$$= \frac{1}{11}. \qquad \square$$

Classi di regolarità

Se $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

diremo che f è di classe C^0 se f è continua.

Poniamo $C^0(A) = C^0(A, \mathbb{R})$

$= \{ f : A \to \mathbb{R} : f \text{ continua} \}.$

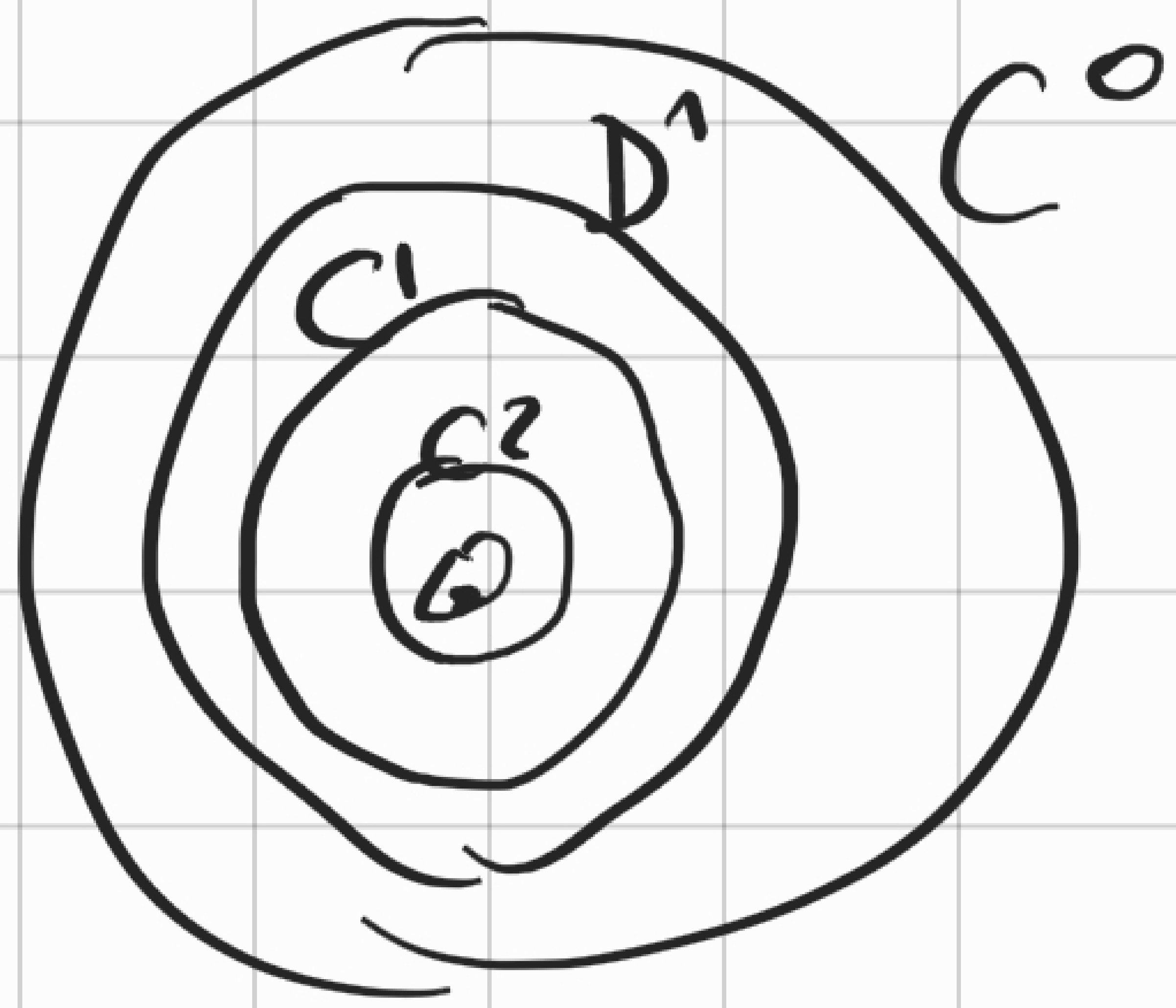
$C^0(A)$ è uno spazio vettoriale reale.

Esercizio: trovare ∞ vettori indipendenti in $C^0(A)$.

Se f è derivabile $\Rightarrow$ f è continua (in tutti i punti del suo dominio)

Diremo che f è di classe D^1

$$D^1(A) = \{ f : A \to \mathbb{R} : f \text{ derivabile} \}$$



$$C^1 = \{ f : A \to \mathbb{R} : f \text{ è derivabile e } f' \in C^0 \}$$

$\vdots$

$$C^{n+1} = \{ f : A \to \mathbb{R} : f \text{ è derivabile e } f' \in C^n \}$$

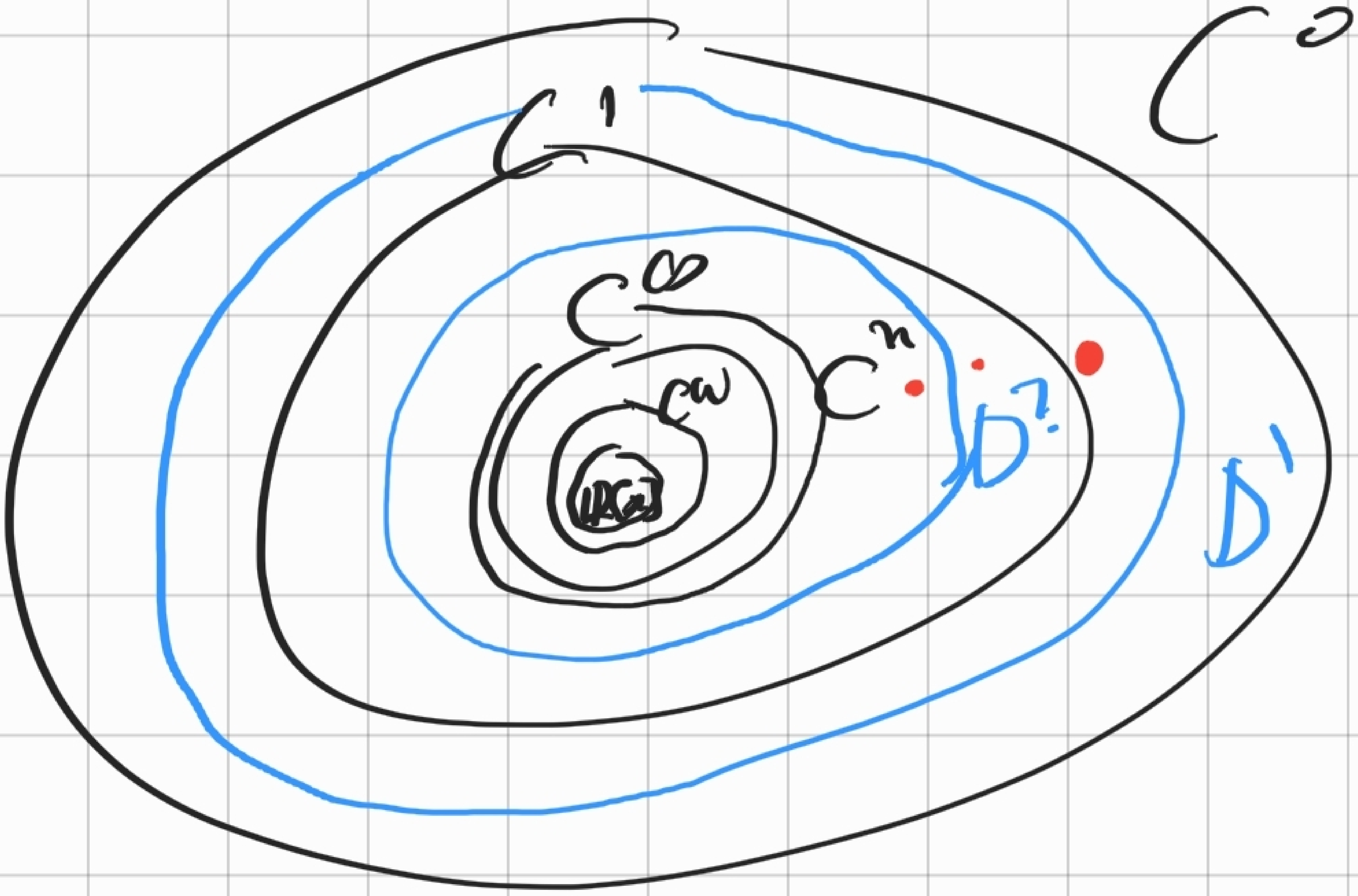
$$C^\infty = \{f : A \to \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : f \in C^n\}$$

$$= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C^n$$

<u>Osservazione</u>: $f(x) = x \quad f \in C^\infty$

$$x^n \in C^\infty$$

$$\mathbb{R}[x] \subseteq C^\infty$$



C^ω = {funzioni analitiche}

= {"somme di serie di potenze"}

$e^x \in C^\infty$

$\sin x, \cos x \in C^\infty$

⚠ $f(x) = \sqrt[n]{x} \quad f \in C^0 \setminus D^1$

⚠ $f(x) = |x| \quad f \in C^0 \setminus D^1$

$\arcsin, \arccos \in C^0 \setminus D^1$

$\operatorname{arctg} \in C^\infty \quad \ldots$

$D^1 \supseteq C^1$

D^1: derivabile

C^1: derivabile con derivata continua

$D^1 \neq C^1$?

Esercizio 4 (test)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Mostrare che $f \in D^1 \setminus C^1$.

$$0 \leq |f(x)| = \left|x^2 \sin \frac{1}{x}\right| \leq x^2 \qquad \text{se } x \neq 0$$

$$\begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & 0 & & 0 \end{array} \quad \text{per } x \to 0$$

$f \in C^0$. (è continua).

$f'(x)$ esiste finito se $x \neq 0$

$$f'(x) = D\left(x^2 \sin \frac{1}{x}\right)$$

$$= 2x\sin\frac{1}{x} + x^2\left(\cos\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \underbrace{2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}}_{\text{si } x \neq 0}.$$

$\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ non existe.

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$= \lim_{\substack{h\to 0\\(h\neq 0)}}\frac{h^{\cancel{2}}\sin\left(\frac{1}{h}\right)-0}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h\to 0} h\sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0$$

f' non è continua in quanto $\lim_{x\to 0} f'(x)$ non esiste □

Osservazione $g(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$

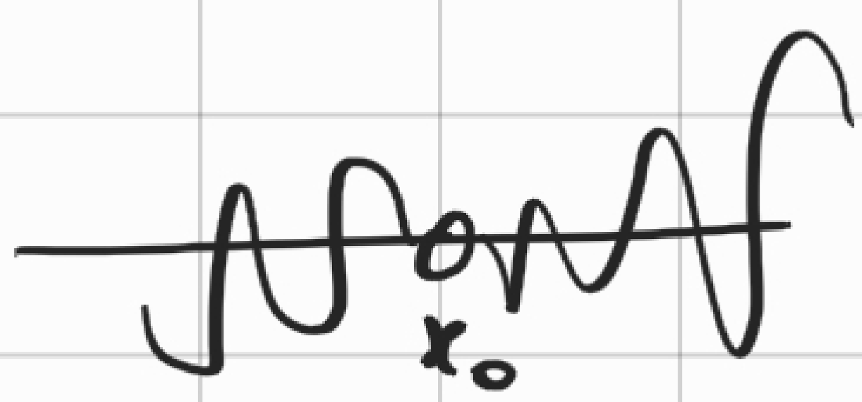
$g \in C^\infty(A)$ $\quad A = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Fatto: $\# C^0(A,\mathbb{R}) < \#\mathbb{R}^A$

MA

Criterio di derivabilità

Se $f: I\to\mathbb{R}$, I intervallo, f continua in x_0, f derivabile in $I\setminus\{x_0\}$, se



$$\lim_{x\to x_0} f'(x) = m \in \mathbb{R}$$

Allora f è derivabile in x_0 e $f'(x_0)=m$ □

dim

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_1) \qquad x_1 \in [x_0, x]$$

Lagrange su $[x_0, x]$

per $x \to x_0$

$$x_0 < x_1 < x \quad \Rightarrow \quad x_1 \to x_0 \qquad f'(x_1) \to m$$

$$\boxed{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \longrightarrow m.}$$

$\square$

Es

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ \sin(x^2) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Con le regole di derivazione si ha

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x > 0 \\ ? & \text{se } x = 0 \\ \cos(x^2)\cdot 2x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$f'(0) = ?$

Possibilità: (NON POSSO USARE LE REGOLE DI DERIVAZIONE)

① Uso la definizione. $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$

$= \dots$

② Uso il criterio:

(a) Verifico che f è continua

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0).$

(b) $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$

deduco che $f'(0) = 0.$

Esercizio

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ \sin x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

No $$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \geq 0 \\ \cos x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$ NO

$f'(0) = 0$

Sì: $$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x > 0 \\ ? & \text{se } x = 0 \\ \cos x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

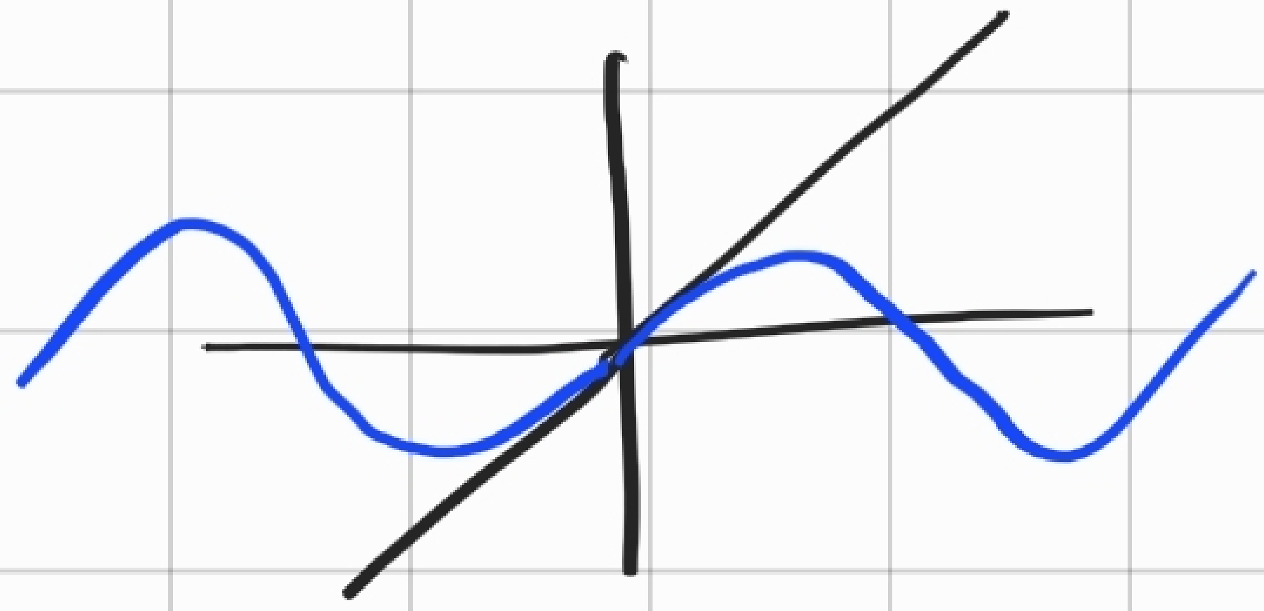
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Se $x>0$ $= \dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h} \Rightarrow x^2$

La derivata è "locale".

Esercizio mostrare che

$f(x) = x - \sin x$



$f(x)>0$ se $x>0$.

dim $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ (non >0).

$\Downarrow$

$\Rightarrow$ f è crescente (strettamente?)

$x>0 \Rightarrow f(x) \geq f(0) = 0$

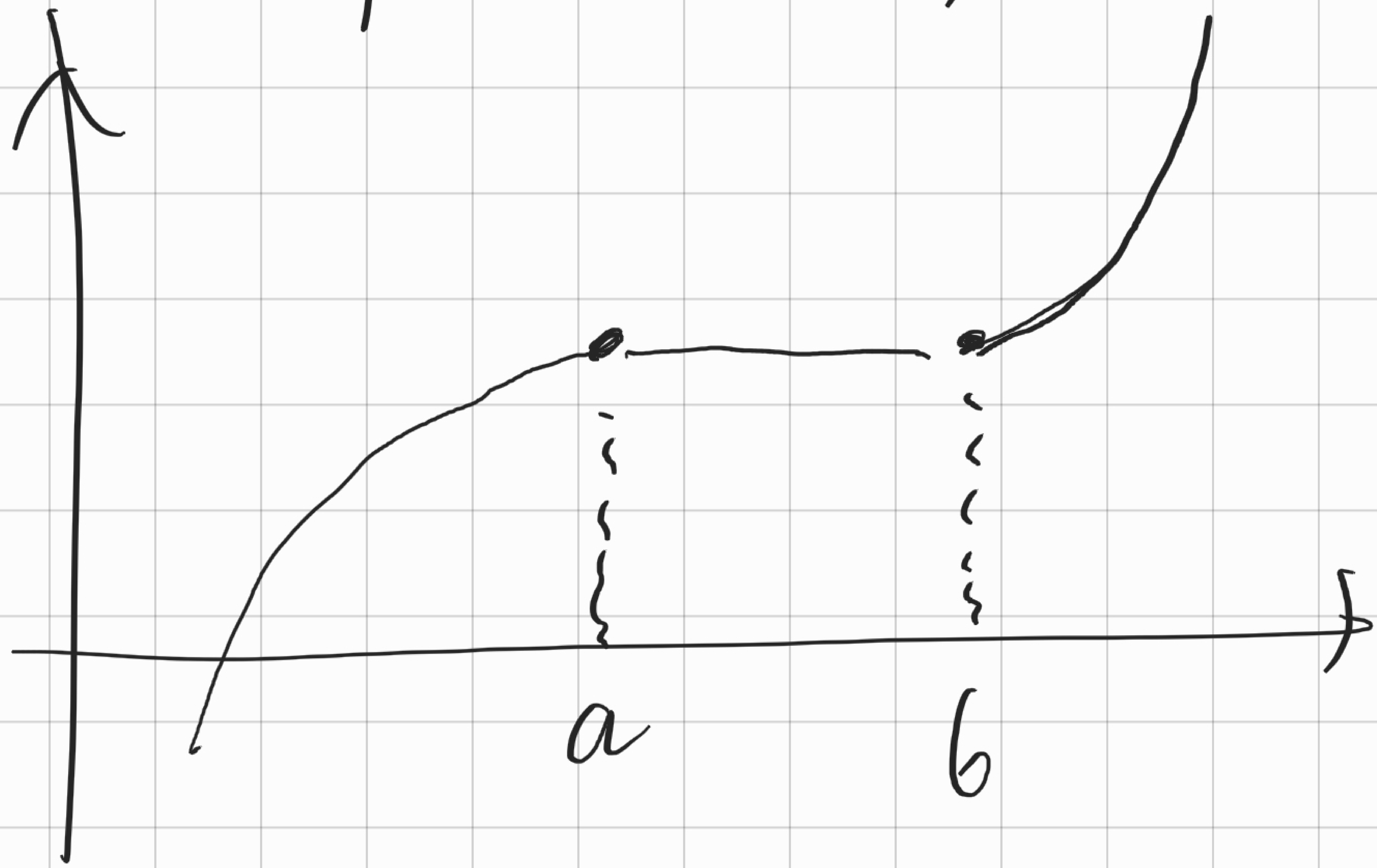
$>$?

Osservazione Quand'è che

una funzione monotona

non è strettamente monotona?

(ad esempio crescente)



se f crescente ma non strettamente $\Rightarrow \exists\, a < b$

$f(a) = f(b)$

se $a < x < b$

$$\underbrace{f(a) \leq f(x) \leq f(b)}$$

$\Rightarrow f(x) = f(a) = f(b)$

$\Rightarrow f$ costante su $[a,b]$

$f'(x) = 0$ su tutto

(a,b)

<u>Criterio</u> di monotonia stretto:

se $f: I \to \mathbb{R}$

è derivabile $f'(x) \geq 0$

e non esiste un intervallo

$\to (a,b) \in I$ su cui $f' \equiv 0$

allora f è strettamente

crescente.

In particolare se

$$\#\{x : f'(x) = 0\} \leq \#\mathbb{N}$$

Nel caso $f(x) = x - \sin x$

$$f'(x) = 1 - \cos x$$

$$f'(x) = 0 \iff x = 2n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\#\{x : f'(x) = 0\} = \#\mathbb{Z}$$

ik