ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 28 - 27.11.2020

$$\boxed{k^2 \ln k + \sqrt{1+k} >> k^2 \quad \text{per } k \to +\infty}$$

$$\frac{k^2}{k^2 \ln k + \sqrt{1+k}} = \frac{\cancel{k^2}}{\cancel{k^2} \ln k \left(1 + \frac{\sqrt{1+k}}{k^2 \ln k}\right)} \to 0$$

$$\frac{\sqrt{1+k}}{k^2 \ln k} = \frac{\sqrt{k\left(\frac{1}{k}+1\right)}}{k^2 \ln k} = \frac{k^{1/2}\sqrt{\frac{1}{k}+1}}{k^2 \ln k}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{1}{k}+1}}{k^{3/2} \ln k} \to 0$$

$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ non esiste

$= a_n$

$\underline{n_k = k^2}$

$$\sqrt{n_k} - \lfloor \sqrt{n_k} \rfloor = \sqrt{k^2} - \lfloor \sqrt{k^2} \rfloor$$

$$= k - \lfloor k \rfloor = k - k = 0$$

$$m_k = k^2 - 1$$

$$\sqrt{m_k} - \lfloor \sqrt{m_k} \rfloor = \sqrt{k^2-1} - \lfloor \sqrt{k^2-1} \rfloor$$

$$= \sqrt{k^2-1} - (k-1)$$

$$= \frac{(k^2-1) - (k-1)^2}{\sqrt{k^2-1} + (k-1)}$$

$$= \frac{\cancel{k^2} - 1 - \cancel{k^2} + 2k - 1}{\sqrt{k^2-1} + k - 1}$$

$$= \frac{2k-2}{\sqrt{k^2-1} + k - 1} = \frac{\cancel{k}\left(2 - \cancel{\frac{2}{k}}^{\to 0}\right)}{\cancel{k}\left[\sqrt{1 - \cancel{\frac{1}{k^2}}_{0}} + 1 - \cancel{\frac{1}{k}}_{0}\right]}$$

$$\longrightarrow \frac{2-0}{\sqrt{1-0}+1-0} = 1$$

il limite non esiste

$\liminf a_n \leq 0$

$\limsup a_n \geq 1.$

SERIE NUMERICHE

serie a termini positivi.

$$\zeta(p)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^p} \qquad \boxed{\text{converge} \iff p>1}$$

serie armonica $p=1$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad \text{se } |q|<1}$$

serie geometrica

Criterio del rapporto

$\sum a_n \quad , \quad a_n>0$

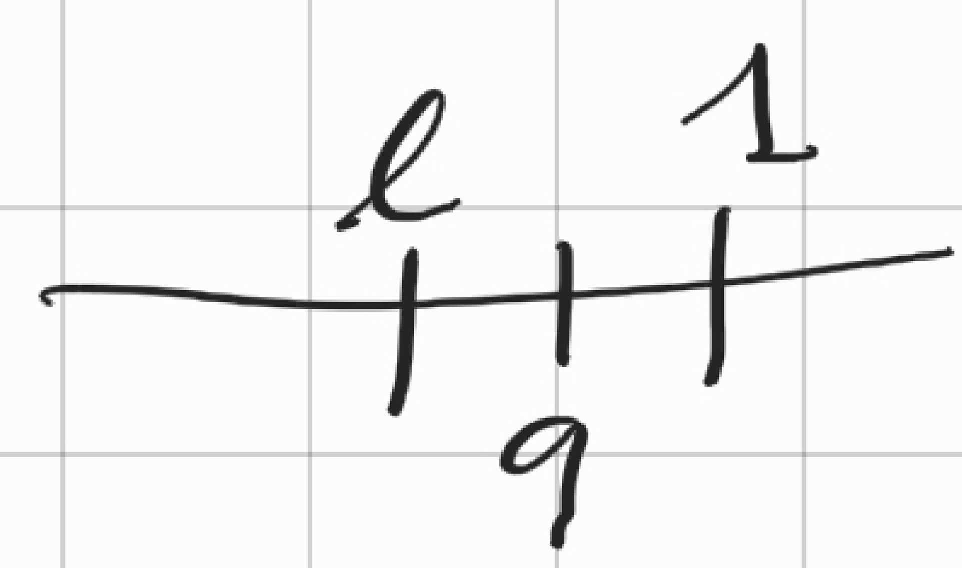
se $\displaystyle\frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow \ell < 1$

allora la serie converge.

$\boxed{\text{se } \ell>1 \text{ la serie diverge}}$

dim idea: $\quad a_n \simeq \ell^n$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow \ell$$



$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1 \text{ definitivamente}$$
$\exists N : \forall n > N \dots$

$$\left.\begin{aligned} a_{N+1} &\leq q\, a_N \\ a_{N+2} &\leq q\, a_{N+1} \leq q^2 a_N \\ &\vdots \\ a_{N+k} &\leq q^k a_N \end{aligned}\right| \forall n \geq N$$

se $n \geq N$
$n = N+k$
$k = n - N$

$$a_n \leq q^{n-N} a_N = q^n \underbrace{\frac{a_N}{q^N}}_{C}$$

$$\underline{\underline{\sum_{n=N}^{+\infty} a_n}} \leq \sum_{n=N}^{+\infty} q^n \frac{a_N}{q^N} = \frac{q^N}{1-q} \cdot \frac{a_N}{q^N} < +\infty$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{N-1} a_n + \sum_{n=N}^{+\infty} a_n < +\infty$$

$\uparrow$

<u>FINITA.</u>

$\square$

Esempio per quali $x > 0$ converge:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$a_k = \frac{x^k}{k!}$$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{x^{\cancel{k+1}}}{(k+1)\cancel{!}} \cdot \frac{\cancel{k!}}{\cancel{x^k}} = \frac{x}{k+1} \to 0 < 1$$

la serie converge $\forall x > 0$.

Sapevamo già che $\frac{x^k}{k!} \ll \frac{1}{k^2}$

$$\frac{\frac{x^k}{k!}}{\frac{1}{k^2}} = \boxed{\frac{k^2 \cdot x^k}{k!}} = \sqrt{\frac{k^4 \cdot (x^2)^k}{(k!)^2}}$$

$$= \sqrt{\underbrace{\frac{k^4}{k!}}_{0} \cdot \underbrace{\frac{(x^2)^k}{k!}}_{0}} \longrightarrow 0$$

<u>Criterio della radice</u> (>1 diverge)

Se $a_n \geq 0$ e $\sqrt[n]{a_n} \to \ell < 1$

allora la serie $\sum a_n$ converge.

<u>Es</u> $a_n = \frac{x^n}{n!}$ $x \geq 0$

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{x}{\sqrt[n]{n!}} \longrightarrow 0$$

criterio $\boxed{\text{rapporto/radice}}$

$$\sqrt[n]{n!} \to +\infty \Leftarrow \frac{(n+1)!}{n!} = n+1 \to +\infty$$

<u>dim</u>

$\sqrt[n]{a_n} \to \ell < 1$

$\to$ definitivamente $\sqrt[n]{a_n} \le q$ $\leftarrow$

$\exists N: \quad a_n \le q^n \qquad \forall n \geq N$

$q < 1$

$$\sum_{n=N}^{+\infty} a_n \le \sum_{n=N}^{+\infty} q^n < +\infty$$

$\square$

<u>Oss</u>

Non serve che il limite

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$ esista.

Basta $\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell < 1$

$\longrightarrow$ se $\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1$ | la serie diverge.

Es

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-(-1)^n)}{2^n} = \sum a_n$$

converge.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{(1-(-1)^n)}{2^n}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{1-(-1)^n}}{2}$$

$\nearrow \frac{1}{2}$ se n dispari

$\searrow 0$ se n pari

$$\limsup \sqrt[n]{\frac{1-(-1)^n}{2^n}} = \frac{1}{2} < 1.$$

$$\sqrt[n]{2} = 2^{\frac{1}{n}} \longrightarrow 2^0 = 1.$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1}$$

$$a_{2k+1} = \frac{2}{2^n} \quad \ldots\ldots \quad \square$$

SERIE CON TERMINI DI SEGNO VARIABILE

Es: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$?? $\qquad \displaystyle\sum_{n\geq 1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

converge

Teorema (convergenza assoluta)

Se $\sum |a_n|$ converge

allora $\sum a_n$ converge

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| \qquad \square$$

$$\Big(\ |a+b| \leq |a| + |b| \ \Big)$$

Definizione. Diremo che la serie

$\sum a_n$ converge **assolutamente**

se converge la $\sum |a_n|$.

dim (teorema).

ipotesi: $\sum |a_n|$ converge

tesi: $\sum a_n$ converge

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n = |a_n| & \text{se } a_n \geq 0 \\ 0 & \text{se } a_n < 0 \end{cases} \qquad a_n^+ \geq 0$$

$$a_n^- = \begin{cases} -a_n = |a_n| & \text{se } a_n \leq 0 \\ 0 & \text{se } a_n > 0 \end{cases} \qquad a_n^- \geq 0$$

$$a_n = a_n^+ - a_n^-$$

$$|a_n| = a_n^+ + a_n^-$$

$$0 \le a_n^+ \le |a_n|$$

$$0 \le a_n^- \le |a_n|$$

Hyp

$$0 \le \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^+ \le \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| < +\infty$$

convergente

$$0 \le \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^- \le \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| < +\infty$$

$$\sum a_n = \sum (a_n^+ - a_n^-) = \sum a_n^+ - \sum a_n^-$$

è convergente

$|a+b| \le |a| + |b|$

Ripeschiamo (*) $|a+b+c| \le |a+b| + |c| \le |a| + |b| + |c|$

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| \le \sum_{k=0}^{n} |a_k|$$ per induzione

$$n \to +\infty$$

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|$$

$\square$

Es $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ è convergente

perché è assolutamente convergente.

Es Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ la seguente serie converge

$$\textcircled{\#} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

la serie $\sum \left| \frac{x^k}{k!} \right| = \sum \frac{|x|^k}{k!}$ converge $\forall x$.

la serie (#) converge assolutamente $\forall x \in \mathbb{R}$

e quindi converge (semplicemente)

ES Per quali x converge

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}$$

studio convergenza assoluta.

$$\sum \frac{|x|^k}{k}$$

applico criterio del rapporto:

$$\frac{\frac{|x|^{k+1}}{k+1}}{\frac{|x|^k}{k}} = |x| \cdot \frac{k}{k+1} \xrightarrow[k \to +\infty]{} |x|$$

Se $|x|<1$ la serie è assolutamente convergente

$\Rightarrow$ è convergente.

Se $|x| > 1$ la serie $\sum \frac{|x|^k}{k}$

è divergente non solo:

$\frac{|x|^k}{k}$ è divergente

$\Rightarrow \frac{|x|^k}{k}$ non tende a 0.

$\Rightarrow \frac{x^k}{k}$ non tende a 0.

$\Rightarrow \sum \frac{x^k}{k}$ non converge

(se $|x| > 1$)

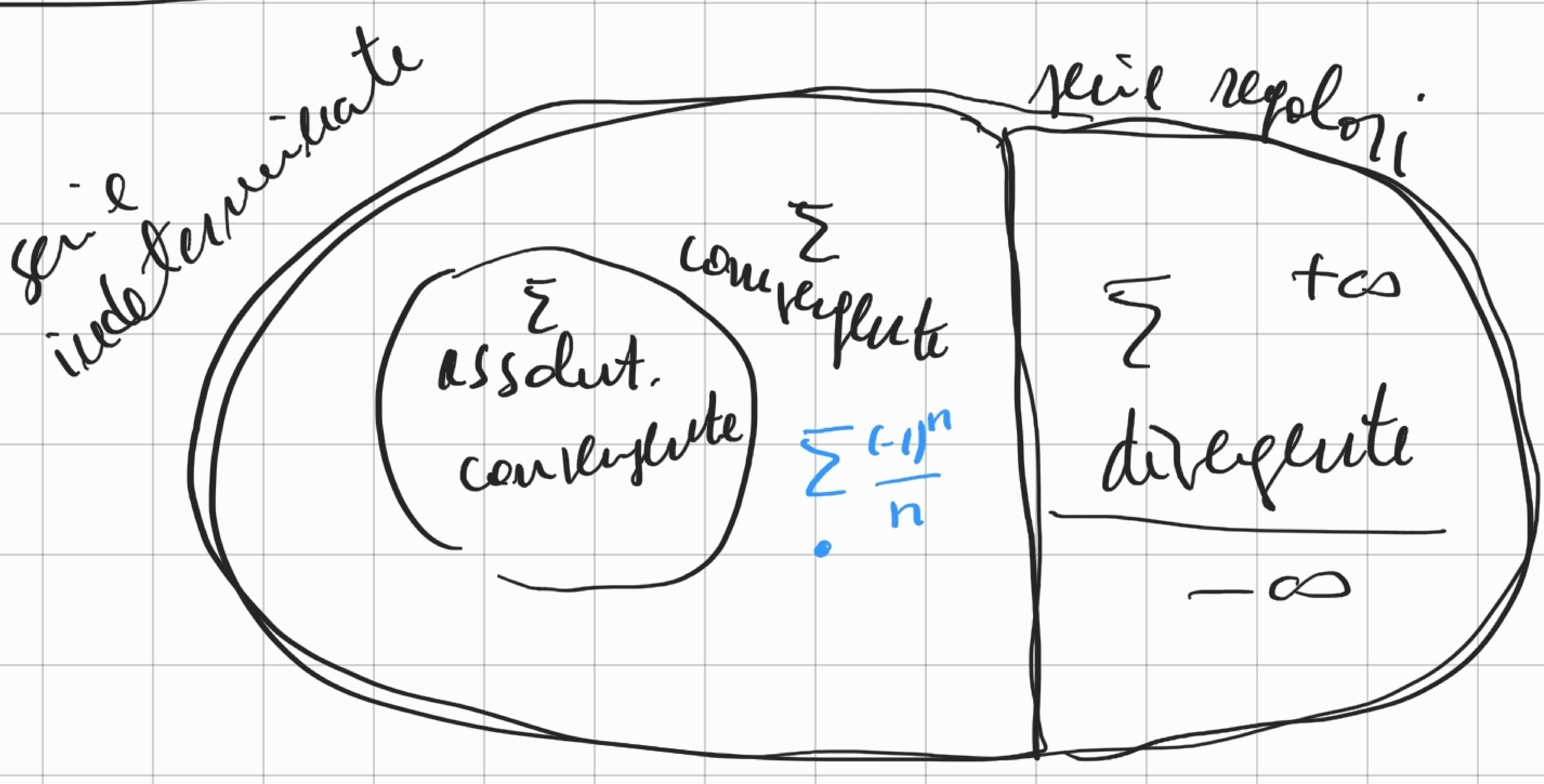
Se $|x| = 1$?

se $x = 1$ $\quad \sum \frac{x^k}{k} = \sum \frac{1}{k} = +\infty$

se $x = -1$ $\quad \sum \frac{(-1)^k}{k}$??

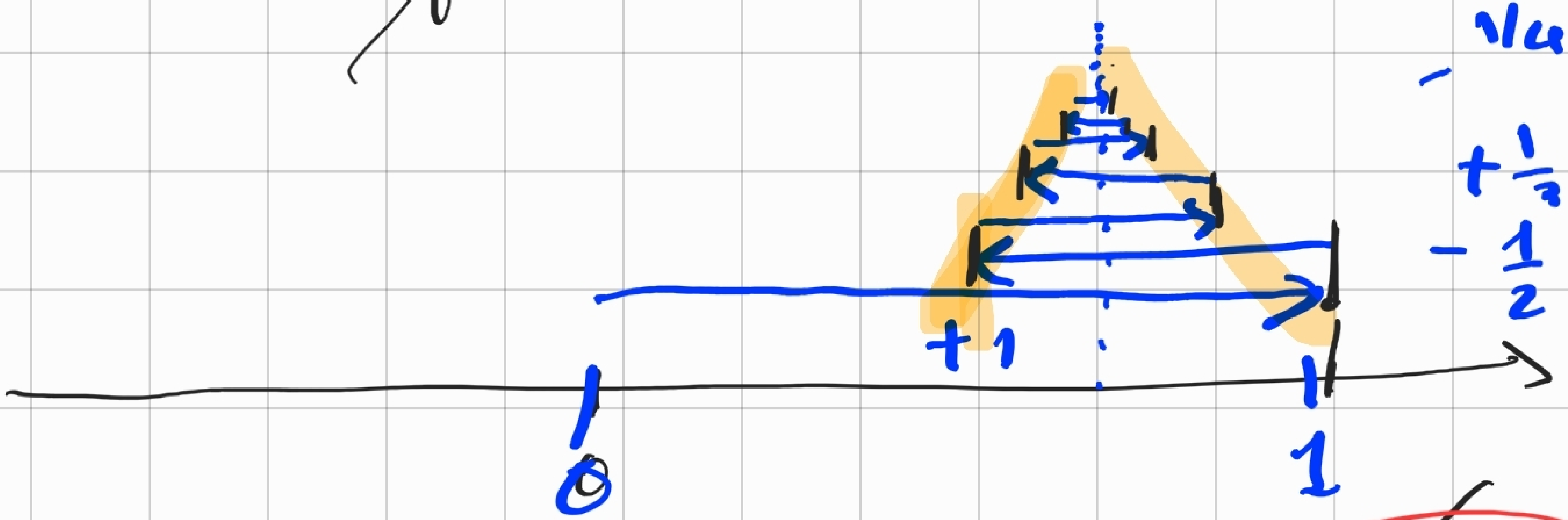
Serie armonica a segni alterni

Vediamo ora che $\sum \frac{(-1)^k}{k}$ è convergente pur non essendo assolutamente convergente



SERIE ARMONICA A SEGNI ALTERNI

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$



$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1} \geq S_{2n} \geq S_0$$

S_{2n+1} decrescenti $\geq S_0$ $\longrightarrow S$ finito

S_{2n} crescenti $\longrightarrow S' \leq S$

$$S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \to 0$$

$$S - S' = 0 \qquad S = S' \; \square$$

$S_n \to S$ la serie è convergente.

Teorema (criterio di Dirichlet per le serie a segni alterni)

$\sum a_n$ $\qquad a_n = \underline{(-1)^n \cdot b_n}$

con $b_n = |a_n| \geq 0$

Se b_n è decrescente e

$b_n \to 0$

Allora $\sum a_n = \sum (-1)^n b_n$

è convergente

$$\boxed{\sum \frac{1}{k^2}}$$

$$\sum \frac{1}{k^p}$$

$$\frac{\frac{1}{(k+1)^2}}{\frac{1}{k^2}} = \frac{k^2}{(k+1)^2} \longrightarrow 1$$

NON SI APPLICA

criterio di condensazione

$$\boxed{\sum \frac{1}{k \ln k}}$$