# ANALISI MATEMATICA B
# LEZIONE 24 - 18.11.2020

$a^x \ll b^x$ per $x \to +\infty$ se $b > a$

per $x \to -\infty$ se $a > b$

Es $\frac{1}{3^n} \ll \frac{1}{2^n}$ $n \to +\infty$

$\underbrace{3^{-n} \ll 2^{-n}}$ $\underbrace{3^x \ll 2^x}_{\uparrow}$ se $x \to -\infty$

---

$$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x \to 0 \quad \text{se } x \to -\infty$$

se $a > b$ $\frac{a}{b} > 1$


---

Per casa $a^n \ll n!$, $n! \ll n^n$

criterio del rapporto: $a_n > 0$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell < 1$

allora $a_n \to 0$

$\frac{a^n}{n!} \searrow 0$ : $\frac{a^{\cancel{n+1}}}{(n+1)\cancel{!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{a^n}} = \frac{a}{n+1} \to 0 < 1$ ✓

$$\frac{n!}{n^n} \to e$$

$$\frac{(n+1)\cancel{!}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{\cancel{n!}} = \frac{\cancel{n+1}}{(n+1)^{\cancel{n+1}}} \cdot n^n$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to \cancel{1} \; ? \quad \text{No!}$$

$a_n \to a$

$b_n \to b \qquad a_n^{b_n} \to a^b$ se non è una forma indeterminata

ma $1^\infty$ è una forma indeterminata

$$a_n^{b_n} = e^{b_n \cdot \ln a_n} \qquad \text{"}1^\infty\text{"} = e^{\infty \cdot \ln 1}$$

$$\ln x = \log_e x \qquad \log x = \ln x$$

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e} < 1$$

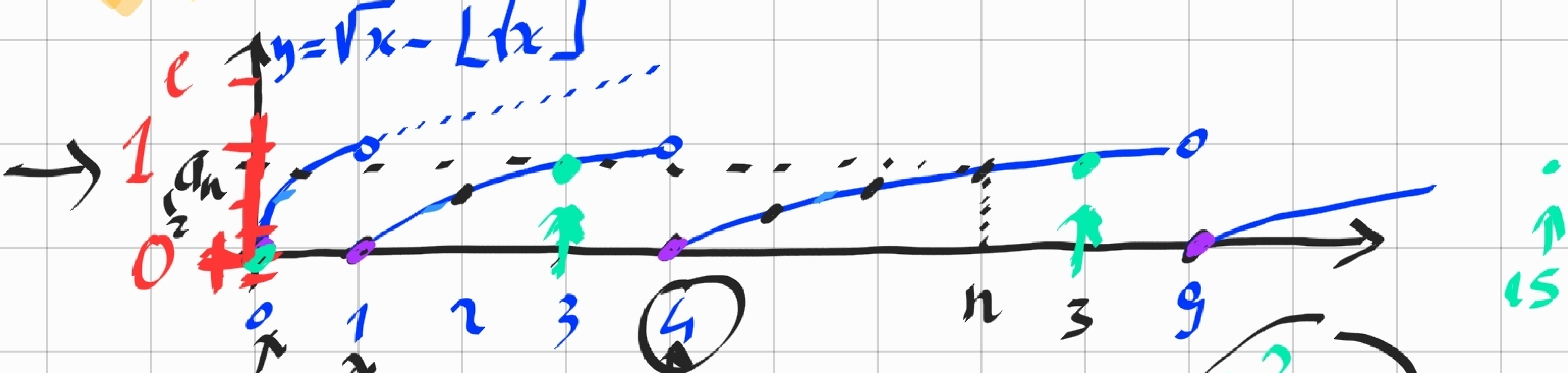
$\square$

# Limiti che non esistono

$a_n = (-1)^n$ non ha limite

$\underline{a} = (a_0 = 1, -1, 1, -1, \ldots)$

$a_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ $\quad 0 \le a_n - 1$




**PUNTI LIMITE**

$n_k = k^2 - 1$ $\quad \boxed{k > 0}$

Se $a_n \to \ell$ $\quad \forall U \in \mathcal{B}_\ell$ : $a_n \in U$ definitivamente

definibile $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ diremo che $\ell$ è un punto limite se

$\forall U \in \mathcal{B}_\ell$ : $a_n \in U$ frequentemente

Es $a_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ ha 0 come punto limite.

per $n \to +\infty$

infatti $a_n = 0$ frequentemente

Se $n = k^2$ $\quad a_n = \sqrt{k^2} - \lfloor \sqrt{k^2} \rfloor$

$= k - \lfloor k \rfloor = 0$

$k^2 \to +\infty \Rightarrow \forall V$ intorno di $+\infty$ $\exists k : k^2 \in V$.

Formalmente $\ell$ è punto limite di $a_n$

se $\forall U \in \mathcal{B}_\ell : \forall V \in \mathcal{B}_{+\infty}$ $\exists n \in V : a_n \in U$

$\forall U \in \mathcal{B}_\ell : \forall \alpha : \quad \exists n > \alpha : a_n \in U$.

(?) Anche $1$ è pto limite per $a_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$

Definizione equivalente

(1) $\ell$ è punto limite per $a_n$ se e solo se esiste $n_k \in \mathbb{N}$, $n_k$ strettamente crescente

$a_{n_k} \to \ell$

## Successioni estratte (o sottosuccessioni)

Se $a_n$ è una successione $\underline{a} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

e $n_k$ è una successione a valori in $\mathbb{N}$ strettamente crescente $\quad \underline{n} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

diremo che $b_k = a_{n_k}$ è una estratta di $a_n$.

<u>Es</u>: $a_n$ $\qquad n_k = k^2$

$$b_k = a_{n_k} = a_{k^2}$$

In effetti $\underline{b} = \underline{a} \circ \underline{n}$

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} \mathbb{N} & \xrightarrow{\underline{n}} & \mathbb{N} & \xrightarrow{\underline{a}} & \mathbb{R} \\ & & n & \longmapsto & a_n \\ k & \longmapsto & n_k & \longmapsto & a_{n_k} \end{array}}$$

---

<u>Es</u> $a_n = (-1)^n \qquad n_k = 2 \cdot k$

$$a_{n_k} = a_{2k} = (-1)^{2k} = 1.$$

$a_n$ è indeterminata, $a_{n_k} \to 1$.

---

**Teorema** Se $a_n \to l$

ogni sottosuccessione $a_{n_k}$
ha lo stesso limite $a_{n_k} \to l$.

**dim** $n_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strett. crescente

$n_k \to +\infty$ $\quad (n_k \geq k)$

$$\lim_{k\to+\infty} a_{n_k} = \lim_{n\to+\infty} a_n = l$$

se questo esiste

---

**Es**
$$a_n = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ primo} \\ n & \text{se } n \text{ non è primo} \end{cases}$$

ha 2 punti limite: $l_1 = 1$
$l_2 = +\infty$.

per induzione se $n_k$ strett crescente

$\boxed{n_k \geq k}$ $n_k \in \mathbb{N}$

$k=0$ $n_0 \geq 0$ $n_0 \in \mathbb{N}$.

$$n_k \geq k \Rightarrow n_{k+1} > n_k$$

$$n_{k+1} \geq n_k + 1 \geq k+1$$ ✓

---

dim che sono equivalenti:

(1) $\forall U \in \mathcal{B}_\ell$ $a_n \in U$ frequentem. $n \to +\infty$

(2) $\exists n_k$ strett. cresc. t.c. $a_{n_k} \to \ell$

$(1) \Rightarrow (2)$

$(1) \Leftrightarrow$ $\forall U \in \mathcal{B}_\ell$ $\forall \alpha$ $\exists n > \alpha$ t.c. $a_n \in U$

scelgo $U_k \in \mathcal{B}_\ell$ intorni sempre più piccoli:

$\ell \in \mathbb{R}$ $U_k = \left(\ell - \frac{1}{k}, \ell + \frac{1}{k}\right)$

$$\begin{cases} \ell = +\infty & U_k = (k, +\infty] \\ \ell = -\infty & U_k = [-\infty, -k) \end{cases}$$

idea: trovare $n_k$ in modo che $a_{n_k} \in U_k$. Così avrò $\underbrace{a_{n_k} \to \ell}$

$n_0$ t.c. $a_{n_0} \in U_0$ per (1)

$n_1 > n_0$ t.c. $a_{n_1} \in U_1$ per (1)

$\vdots$

$n_{k+1} > n_k$ t.c. $a_{n_{k+1}} \in U_{k+1}$

$$n_{k+1} = \min \{ n : n > n_k , a_n \in U_{k+1} \}$$

(1) dice che $\{\ldots\} \neq \emptyset$ $\square$

$(2) \Rightarrow (1)$

$(2) \Leftarrow \exists\ a_{n_k} \to \ell$

$\forall U \in \mathcal{B}_\ell \quad a_{n_k} \in U$ definitivamente per $k \to +\infty$

$\Rightarrow \quad a_n \in U$ frequentemente $\square$

---

<u>Esercizio</u> $\quad a_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$

dimostriamo che $1$ è punto limite di $a_n$.

Poniamo $\quad n_k = k^2 - 1$ $\quad k > 0$

$$a_{n_k} = \sqrt{n_k} - \lfloor \sqrt{n_k} \rfloor = \sqrt{k^2-1} - (k-1)$$

$$k^2 - 2k + 1 = (k-1)^2 \underset{\text{se } k \geq 1}{\leq} k^2 - 1 < k^2$$

$$k - 1 \leq \sqrt{k^2-1} < k$$

$$\Downarrow$$

$$\lfloor \sqrt{k^2-1} \rfloor = k - 1$$

$$\lim_{k\to+\infty} \underbrace{\sqrt{k^2-1}} - \underbrace{(k-1)}$$

# EQUIVALENZA ASINTOTICA

$a_n << b_n$ se $\frac{a_n}{b_n} \to 0$

$a_n >> b_n$ se $\frac{a_n}{b_n} \to +\infty$

$a_n \sim b_n$ se $\frac{a_n}{b_n} \to 1$.

asintoticamente equivalente

$\sqrt{k^2-1} \sim k$ $\qquad \frac{\sqrt{k^2-1}}{k} = \sqrt{1-\frac{1}{k^2}} \to 1$

$k-1 \sim k$ $\qquad \frac{k-1}{k} = 1-\frac{1}{k} \to 1$

$$\sqrt{k^2-1}-(k-1) = \frac{(k^2-1)-(k-1)^2}{\sqrt{k^2-1}+(k-1)}$$

$$= \frac{\cancel{k^2}-1-\cancel{k^2}+2k-1}{\phantom{x}}$$

$$= \frac{\cancel{k}\left(2-\cancel{\frac{2}{k}}^{\,0}\right)}{\cancel{k}\underbrace{\left[\sqrt{1-\cancel{\frac{1}{k^2}}^{\,0}}+1-\cancel{\frac{1}{k}}^{\,0}\right]}_{\to 2}} \to 1$$

$\square$

<u>Per casa</u> Ci sono altri punti limite per la successione $a_n = \sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor$ ?

---

Come si dimostra che $\nexists\, a_n$ non ha limite? $a_n$ non ha limite perché 0 e 1 sono entrambi punti limite.

Sia $L$ l'insieme dei punti limite

① $a_n$ regolare $\iff$ $\# L = 1$

② <u>Teorema di B-W</u> (venerdì)

$L \neq \emptyset \quad \forall$

③ Definizione:

$$\begin{cases} \limsup\limits_{n \to +\infty} a_n = \sup L \\ \liminf\limits_{n \to +\infty} a_n = \inf L \end{cases}$$

Questi operatori sono sempre $\forall$ definiti (a differenza del $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$)

ES $\quad a_n = \sqrt{n} - [\sqrt{n}]$

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n = 1$$

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n = 0$$

---

$$\exists \lim a_n = \ell$$

$$\Updownarrow$$

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n = \liminf_{n\to+\infty} a_n = \ell$$

---

$\ell$ punto limite per $\underline{\underline{f(x)}}$ $\quad x \to +\infty$

$$\Updownarrow$$

$\exists\ x_n \to +\infty$ t.c. $\underline{f(x_n) \to \ell}$