ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 14 – 23.10.2020

<u>Isomorfismi</u> di gruppi ordinati (additivi) R, S

$f : R \to S$ $\qquad f(x+y) = f(x) + f(y)$

bigettiva $\qquad$ additività (omomorfismo)

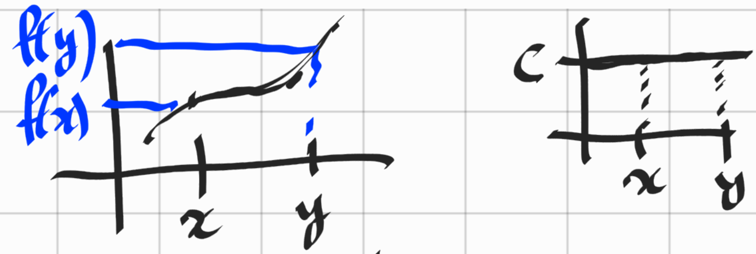
[linearità: $f(\lambda x) = \lambda \cdot f(x)$
+ additività]

[Esistono funzioni additive ma non lineari
vedi note sul paradosso di Banach-Tarski]

Per mantenere l'ordinamento: $\underset{R}{x \le y} \Rightarrow \underset{S}{f(x) \le f(y)}$.

<u>Def.</u> (monotonia) $\quad f : R \to S$ (insiemi ordinati)

1. f è <u>crescente</u> (debolmente) $\quad x \le y \Rightarrow f(x) \le f(y)$
2. <u>decrescente</u> $\quad x \le y \Rightarrow f(x) \ge f(y)$
3. <u>monotona</u> se è crescente o decrescente



4. <u>costante</u> se è crescente e decrescente.
ovvero esiste $c \in \mathbb{R}$ $\underline{\underline{f(x) = c \ \forall x}}$

5. <u>strettamente crescente</u> se
$x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

6. <u>strettamente decrescente</u> $(\Leftrightarrow)$
$x < y \underset{(\Leftarrow)}{\Rightarrow} f(x) > f(y)$

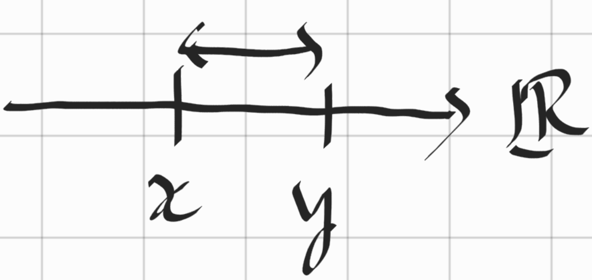
7. <u>strettamente monotona</u> se è strett. cresc.
o strett. decr.

(<u>Oss</u> f strett. monotona $\Rightarrow$ f è iniettiva)
$x \neq y$ $\quad x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$
$\quad x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$

<u>Def</u> (valore assoluto)

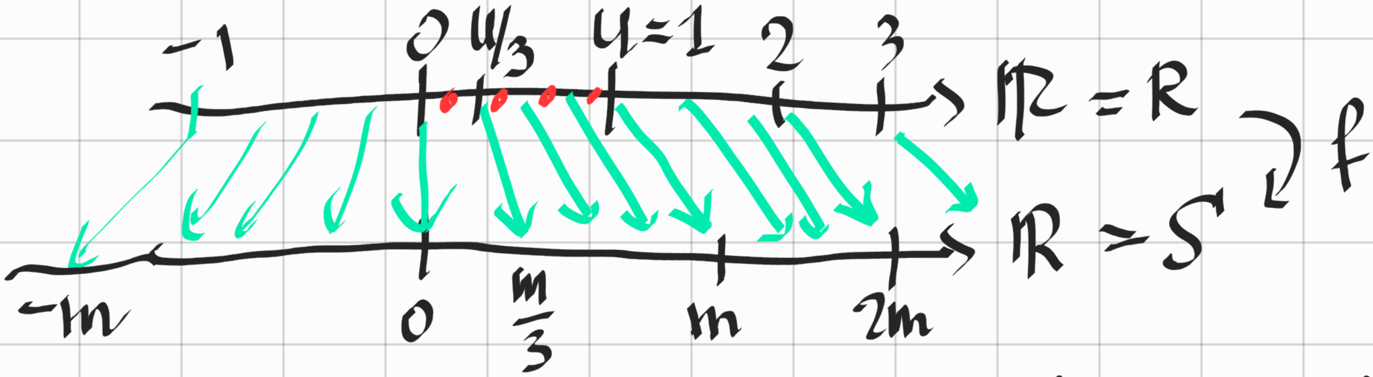
$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$|7| = 7$
$|-7| = 7$



$|x-y| =$ "distanza tra x e y"

Siano R, S gruppi totalmente ordinati densi e continui. (come $\mathbb{R}$)



$$f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) \qquad 0 = f(0)$$

Richiedo $f(u) = m \in S$ (anzo per fissare le idee)

$$f(-x) + f(x) = f(-x+x) = f(0) = 0$$

$$f(-x) = -f(x).$$

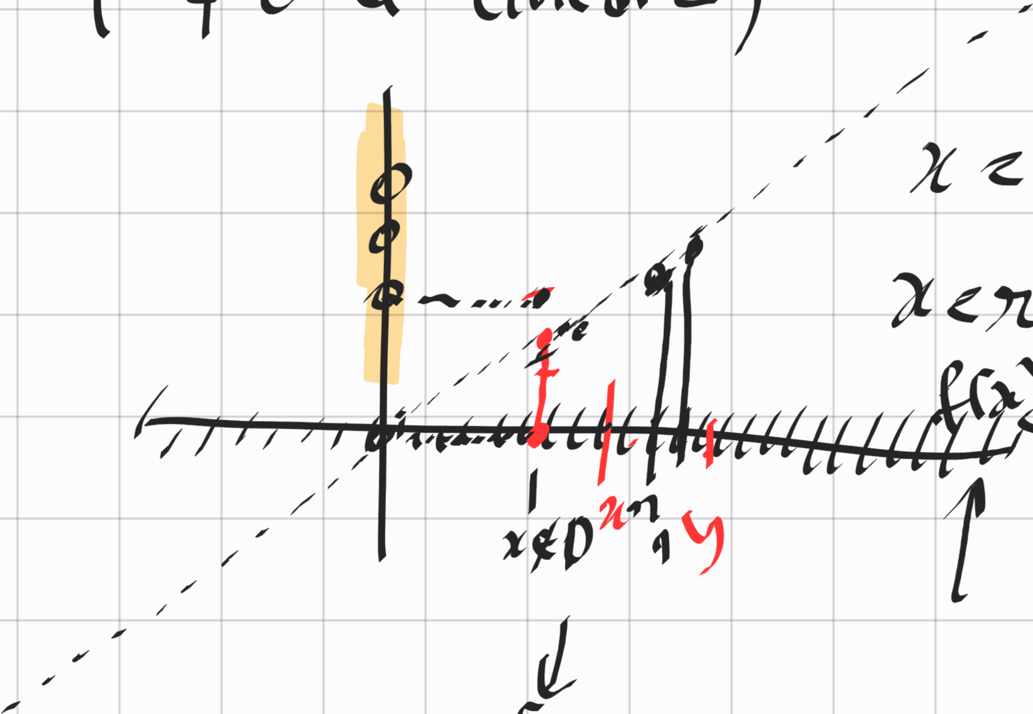
$$f(n \cdot x) = n \cdot f(x) \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$3 f\left(\frac{x}{3}\right) = f\left(3 \cdot \frac{x}{3}\right) = f(x)$$

$$f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{f(x)}{n} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

$$f\left(p \cdot \frac{u}{q}\right) = \frac{p\, f(u)}{q} = p \frac{m}{q}$$

(f è $\mathbb{Q}$-lineare)



$x < y \quad r, s \in \mathbb{Q}$

$x < r < s < y$

$f(x) \leq f(r) < f(s) \leq f(y)$

$\mathbb{R}$

$(m > 0)$

$$\underline{\underline{f(x)}} = \sup \left\{ p\frac{m}{q} : \frac{p}{q} \leq x,\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} \right\}$$

$q \neq 0$

$\pi \cdot \sqrt{2}$ $\quad$ 1,4142.. $\quad$ 3,141592..

f sarà biettiva

è iniettiva. $(x\, m > 0)$

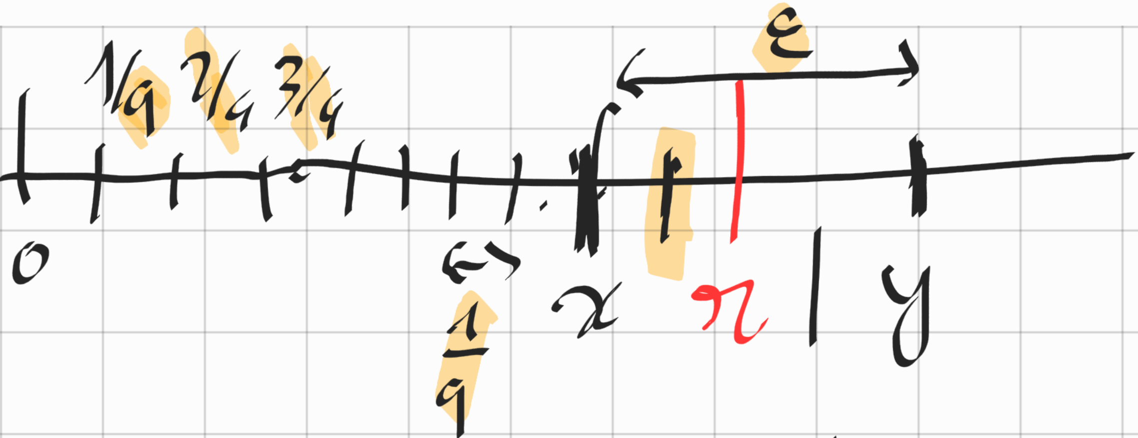
$f : \mathbb{R} \to S$ $\quad$ g

iniettiva

Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$:

Dati $x, y \in \mathbb{R}$ $\quad \exists\, r \in \mathbb{Q} \quad x < r < y$

$x < y$



$q\varepsilon > 1$

$\Downarrow$

$\varepsilon = y - x \;, \quad \varepsilon > 0$

Per Archimede esiste $q \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{q} < \varepsilon$

$\exists\; p \in \mathbb{Z}$ minimo tale che:

$$x < \frac{p}{q} \qquad \left(\frac{p-1}{q} \leq x \right)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{p}{q} < y \Leftarrow \frac{p}{q} = \frac{p-1}{q} + \frac{1}{q} \leq x + \frac{1}{q} < y$$

$\square$

Dato $m \in \mathbb{R}$ $\exists!\; f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ additiva, monotona, tale che $f_m(1) = m$

$$f_m(x+y) = f_m(x) + f_m(y)$$

Se $m>0$ $\quad x \leq y \Rightarrow f_m(x) \leq f_m(y)$

Definisco $\quad m \cdot x = f_m(x)$

$$m(x+y) = mx + my$$

$x \leq y$, $m>0$, $mx \leq my$

Dimostriamo che $(m+s)x = m \cdot x + s \cdot x$

$$\underbrace{(m+s)x}_{= f_{m+s}(x)} = \underbrace{m \cdot x + s \cdot x}_{= f_m(x) + f_s(x)}$$

$m, s > 0$

g è additiva, è monotona

$g(x) = f_m(x) + f_s(x)$

$g(1) = f_m(1) + f_s(1) = m + s$

$g(x) = f_{m+s}(x)$

Questa moltiplicazione rende $\mathbb{R}$ un campo.

$(\mathbb{R},+)$ $\quad$ $(\mathbb{R},\oplus)$

$x+y$ $\quad$ $x\oplus y = y+x$

additività: $f(x+y) = f(y)+f(x)$

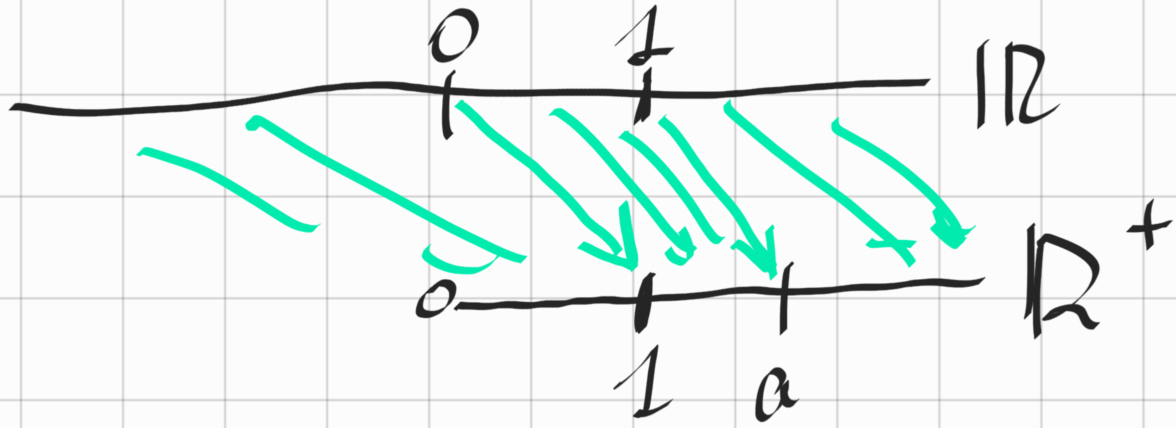
se $f=id$ $\quad$ $x+y=y+x$.

<u>Oss</u> $\mathbb{R}^+ = \{x\in\mathbb{R} : x>0\}$

$S=(\mathbb{R}^+,\cdot)$ è un gruppo (moltiplicativo) totalmente ordinato denso e continuo.

Per il teorema sugli isomorfismi

fissato $a\in\mathbb{R}^+$ $\quad$ $a>1$.



$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \quad e$$

$$f(0) = 1 \qquad f(1) = a$$

$$f(x+y) = f(x)\cdot f(y) \quad \forall$$

$$f(nx) = f(x)^n \quad e$$

$$f\left(\frac{x}{q}\right) = \sqrt[q]{f(x)} \quad \forall$$

$$f\left(\frac{p\,x}{q}\right) = \sqrt[q]{f(x)^p}$$

È naturale definire

$$\boxed{a^x = f(x)}$$

$$a^0 = 1 \qquad a^1 = a$$

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$

$$a^{nx} = (a^n)^x$$