ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 12 - 19.10.2020

Esercizio (1 del test)

$$\sum_{k=1}^{2n} 2k = 2n\cdot\left(\frac{2+2\cdot 2n}{2}\right) = n(4n+2)$$

$$= 4n^2+2n$$

Esercizio (6 del test)

$$2^a\cdot 2^b = 2^{a+b}$$

$$\left(\prod_{k=1}^{n} 2^k\right)^2 = \left(2^{\sum_{k=1}^{n} k}\right)^2 = \left(2^{\frac{n(n+1)}{2}}\right)^2$$

$$= 2^{n(n+1)} = 2^{n^2+n}$$

Esercizio (3 del test)

$$\frac{(2n)!}{n!} \geq n^n$$

$$\overbrace{(2n)\cdot(2n-1)\cdots\cdots(n+2)\,(n+1)}^{n \text{ fattori}}$$

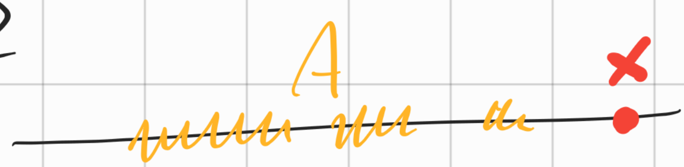
$$\geq n \cdot n \cdots\cdots n \cdot n$$

ORDINAMENTO dei $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ gruppo additivo totalmente ordinato $\leq$, denso, continuo

<u>Definizioni</u> (max, min, sup, inf, limitatezza, maggioranti...)

Dato $A \subseteq \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$



Diremo che x è un maggiorante di A se $x \geq A$ $(\forall a \in A : x \geq a)$

x è un minorante di A se $x \leq A$ $(\forall a \in A : x \leq a)$

Se esiste un maggiorante di A diremo che A è superiormente limitato

Es $A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$, 0 è un maggiorante di A
A è superiormente limitato
$B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ non è superiormente limitato.

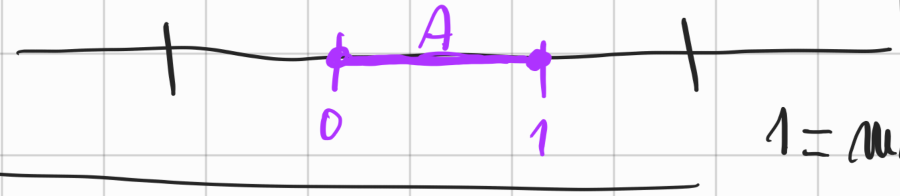
Se non è sup. limitato diremo che A è superiormente illimitato

Analogamente definisco inferiormente limitato
inferiormente illimitato

Se un insieme è superiormente e inferiormente limitato diremo che è limitato.

Se A non è limitato diremo che è illimitato

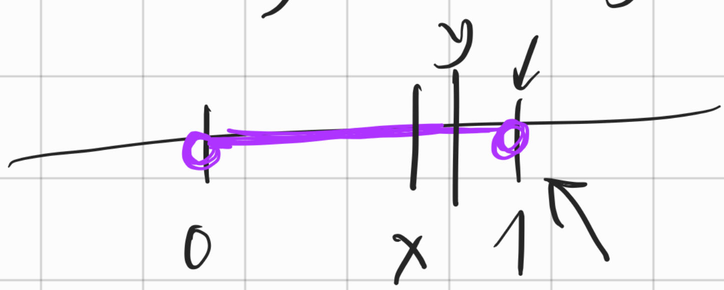
Es $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$ è limitato (ma è infinito)



$1 = \max A$

Diremo che x è il massimo di A e scriveremo $x = \max A$ (il massimo se esiste è unico) se $x \geq A$ e $x \in A$.

Es $B = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ non ha massimo. Dato $x \in B$, $0 < x < 1$ per densità esiste y $x < y < 1$ $y \in B$.



Analogamente $x = \min A$ (minimo) se $x \le A$ e $x \in A$.

Diciamo che x è l'estremo superiore di A se x è il minimo dei maggioranti ovvero se

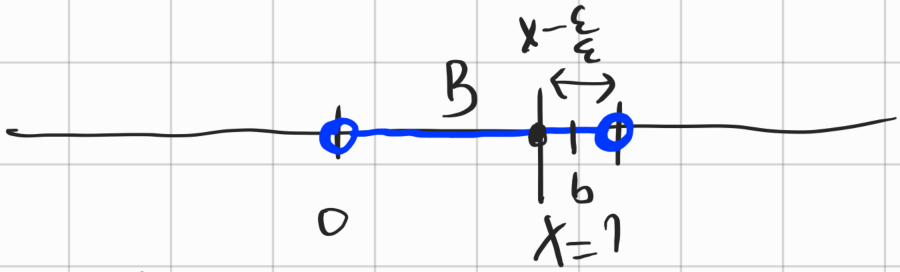
$$\begin{cases} \text{(i)} \quad x \geq A \quad (\forall a \in A : \ a \leq x) \\ \qquad \Downarrow \\ \text{(ii)} \quad \forall \varepsilon > 0 : \ x - \varepsilon \text{ non è un maggiorante} \\ \qquad \forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A : \ x - \varepsilon < a . \quad (a \leq x) \end{cases}$$

$\Bigg($ $x - \varepsilon$ non è un maggiorante significa

$\neg (x - \varepsilon \geq A)$

$\neg (\forall a \in A : x - \varepsilon \geq a)$

$\exists a \in A : x - \varepsilon < a$ $\Bigg)$



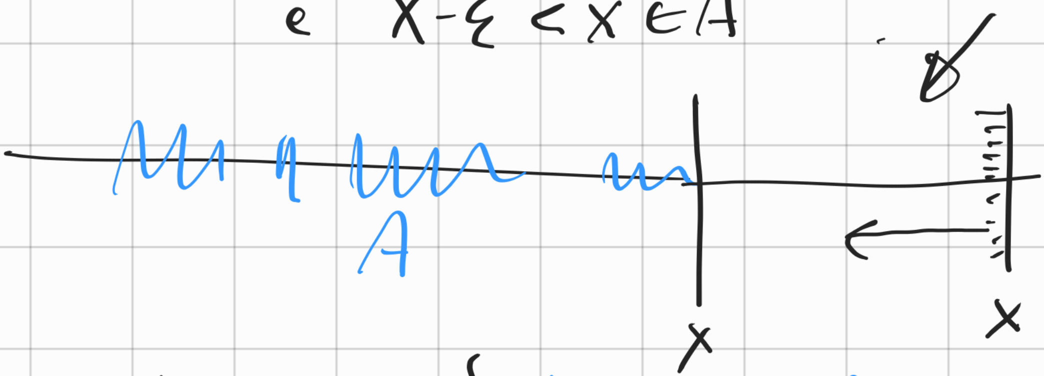
1 è l'estremo superiore di $B = \{ b \in \mathbb{R} : 0 < b < 1 \}$

$1 \geq B$ (anzi $1 > B$) $\qquad x - \varepsilon < x = 1 \qquad$ ($b > 0$)

$\exists b : \ x - \varepsilon < b < 1 , \ b \in B .$

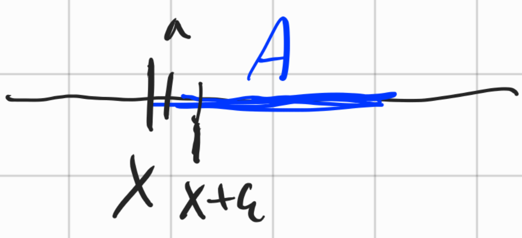
Notazione $X = \sup A$

<u>Nota</u> se $x = \max A$ allora $x = \sup A$.
infatti x è un maggiorante
e $X - \varepsilon < x \in A$



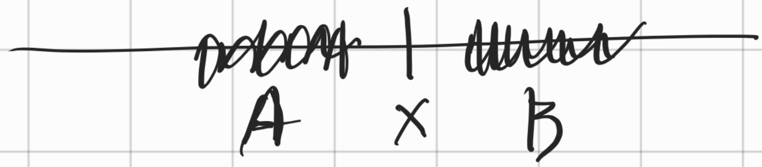
Analogamente x è l'estremo inferiore di A se x è il massimo dei minoranti,
$x = \inf A$.

formalmente:
$$\begin{cases} \forall a \in A: & x \leq a \\ \forall \varepsilon > 0: \exists a \in A: & a < x + \varepsilon \end{cases}$$



<u>Teorema</u> (esistenza del sup e dell'inf).
Se $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, superiormente limitato (inferiormente)
allora $\exists \sup A$.
(inf)

dim Ricordiamo l'assioma di continuità



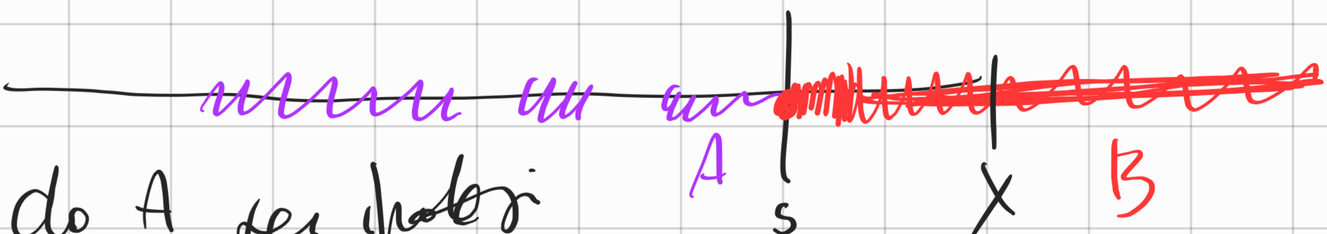
[$\forall A, B \subseteq \mathbb{R}$, $A, B \neq \emptyset$

se $A \leq B$ $(\forall a \in A : \forall b \in B : \; a \leq b)$

Allora esiste $x \in \mathbb{R}$: $A \leq x \leq B$ $(\forall a \in A, \forall b \in B \;\; a \leq x \leq b)$]

Sia $B = \{ b \in \mathbb{R} : b$ è un maggiorante di $A \}$

$= \{ b \in \mathbb{R} : b \geq A \}$



Visto che A per ipotesi è sup. limitato $B \neq \emptyset$.

$\forall a \in A \; \forall b \in B : \; b \geq A \Rightarrow A \leq B$.

$\exists s \in \mathbb{R}$ $\quad A \leq s \leq B$.

s è un maggiorante di A $\Rightarrow$ $s \in B$ $\Big|$ $s = \sup A$.

s è il minimo di B

□

ES se $A = \{ a : 0 < a < 1 \}$

$B = \{ b \in \mathbb{R} : b \geq A \} = \{ b \in \mathbb{R} : b \geq 1 \}$

L'insieme $\mathbb{N}$ è superiormente illimitato?

<u>Teorema</u> (proprietà archimedea dei numeri reali)

$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x > 0,\ y > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} : ny > x$

In particolare $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N} : n > x$.

cioè $\mathbb{N}$ è illimitato.

<u>dim</u>

$$A = \mathbb{N} \cdot y = \{ny : n \in \mathbb{N}\}$$

Basta dimostrare che A non è superiormente limitato.

Se lo fosse avrebbe estremo superiore

$$s = \sup A$$

$s - y$ non è maggiorante

$\exists a \in A \qquad s - y < a = ny$

$S < (n+1)y \in A$

assurdo. $\square$

Corollario $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{Z}$

$$n \leq x \leq n+1 \qquad \square$$

Si può definire la parte intera di un numero reale.

$$f'(x) = \frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon} \quad \text{con } \varepsilon \text{ inf.}$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$0,999\ldots = 1,000000$$

$$\varepsilon = 0,\underbrace{000\ldots}_{\infty}5$$

$$0,\underbrace{9999\ldots}_{\infty}5$$

$$\varepsilon + \varepsilon = ?$$