ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 11 — 16.10.2020

$$4\sum_{k=1}^{n} k^3 = n^4 + 2n^3 + n^2$$
$$= n^2(n^2+2n+1) = n^2(n+1)^2$$
$$= \left(2\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$

$P(n)$: $\quad 4\sum_{k=1}^{n} k^3 = n^2(n+1)^2$

(i) $P(0)$ $\qquad 0 = 0$ ✓

(ii) $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$P(n+1)$: $\quad 4\sum_{k=1}^{n+1} k^3 \overset{?}{=} (n+1)^2(n+2)^2$

$$4\left[\sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3\right] \qquad (n+1)^2(n^2+4n+4)$$

$P(n) \rightarrow$ ‖ $\qquad\qquad$ ‖

$$n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3 = (n+1)^2\left(n^2+4(n+1)\right)$$

POLINOMIO

Espressione polinomiale $\overset{\text{a coefficienti in } \mathbb{Z}}{\vee}$: es: $(x+2)\cdot(x+2)$

Funzione polinomiale: $\mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$

$$x \longmapsto (x+2)(x+2)$$

Polinomio $\quad (x+2)\cdot(x+2) \cong x\cdot x + 4\cdot x + 4$

$$= x^2 + 4\cdot x + 4$$

monomio

Forma normale : $P: a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 + a_0$

coefficienti

$$a x^3 + b x^3 = \boxed{(a+b)\, x^3}$$

$$x^1 = x$$
$$x^0 = 1$$

ovvero $P: \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$

Due espressioni polinomiali sono equivalenti (e quindi rappresentano lo stesso polinomio) se hanno la stessa forma normale

Es $(x+2)^2$ $\qquad$ $x(x+4)+4$

sono espressioni equivalenti || poiché:

$x \cdot x + x \cdot 4 + 4$

$(x+2)(x+2)$

$= x \cdot x + 2 \cdot x + x \cdot 2 + 2 \cdot 2$

$= 1 \cdot x^2 + 4 \cdot x^1 + 4 \cdot x^0$

$= \sum_{k=0}^{2} a_k \cdot x^k$

grado del polinomio

$a_0 = 4$
$a_1 = 4$
$a_2 = 1$ ← grado 2
$a_3 = 0$
$a_4 = 0$
$\vdots$

Es $(x+1)(x-1) = x^2 + x - x - 1$

$= x^2 - 1$

$= \sum_{k=0}^{2} a_k x^k$

$a_0 = -1$
$a_1 = 0$
$a_2 = 1$

Il **grado** di un polinomio P è l'esponente n più grande dei monomi non nulli (quando il polinomio è in forma normale) si indica con $n = \deg P$

$$\deg\left(x^2 - (x-1)^2\right)$$

$$= \deg\left(x^2 - (x^2 - 2x + 1)\right)$$

$$= \deg\left(\underline{0 \cdot x^2} + 2 \cdot x - 1\right)$$

$$= \deg\left(2 \cdot x^1 - 1\right) = 1.$$

Principio di identità dei polinomi:
due espressioni polinomiali sono equivalenti se e solo se portate in forma normale hanno coefficienti corrispondenti uguali.

COEFFICIENTI BINOMIALI

$$(a+b)^n$$

$$(a+b)^1 = 1a+1b$$
$$(a+b)^2 = 1a^2+2ab+1b^2$$
$$(a+b)^3 = 1a^3+3a^2b+3ab^2+1b^3$$
$$(a+b)^4 = 1a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+1b^4$$

TRIANGOLO DI TARTAGLIA

coefficienti binomiali:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccl}
 & & & & & 0 & & 1 & & 0 & & & & & n=0\\
 & & & & 0 & & 1 & & 1 & & 0 & & & & n=1\\
 & & & 0 & & 1 & & 2 & & 1 & & 0 & & & n=2\\
 & & 0 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & 0 & & n=3\\
 & 0 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & 0 &
\end{array}
$$

Def I coefficienti del polinomio: $\binom{3}{3}$

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Si indicano con la notazione:

$$\binom{n}{k} = a_k$$

e si chiamano **coefficienti binomiali**

Es

$$(x+1)^3 = 1\cdot x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$\binom{3}{4}=0 \qquad \binom{3}{3} \qquad \binom{3}{2} \qquad \binom{3}{1} \qquad \binom{3}{0} \qquad \binom{3}{-1}=0$$

$n \in \mathbb{N}, \quad k = 0, \dots, n$

Per comodità definiamo $\binom{n}{k}$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$

ponendo $\binom{n}{k} = 0$ se $k<0$ o se $k>n$

$(1+x)^{-1} = \dfrac{1}{1+x}$ non è un polinomio

$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$ non è un polinomio

	0	1	2	3	....	k
0	1					
1	1	1	0			
$n =$ 2	1	2	1	0		
$n+1 =$ 3	1	3	3	1		
⋮ n						

$k=2$

<u>Teorema</u> (Tartaglia) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}}$$

<u>dim</u>

$$(1+x)^{n+1} = \boxed{\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k}$$

definizione

$$\|$$

$$(1+x)\cdot\boxed{(1+x)^n} = (1+x)\cdot\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k}$$

definizione

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k + x \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1}$$

$j = k+1$

$k = j-1$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k + \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} x^j$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} x^k + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k$$

$$\binom{n}{n+1} = 0$$

$$\binom{n}{-1} = 0$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] x^k$$

Per il principio di identità dei polinomi

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

$\square$

ES

$$(1+x)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} x^k$$

$$= 1 \cdot x^0 + 5 \cdot x^1 + 10 \cdot x^2 + 10 \cdot x^3 + 5 \cdot x^4 + 1 \cdot x^5$$

1 1	1
1 2 1	2
1 3 3 1	3
1 4 6 4 1	4
1 5 10 10 5 1	

$$(a+b)^5 = b^5 \cdot \left(\frac{a}{b} + 1\right)^5 = 1 \cdot b^5 + 5 \cdot a \cdot b^4 + 10 a^2 b^3$$
$$+ 10 \cdot a^3 b^2 + 5 a^4 b + 1 \cdot a^5$$

ES $(x+2)^3 = x^3 + 3x^2 \cdot 2 + 3x \cdot 2^2 + 2^3$

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}$$

Teorema

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}} \quad \begin{pmatrix} n \in \mathbb{N} \\ k \in \mathbb{N} \\ k \leq n \end{pmatrix}$$

$\mathbb{N}$ (*)

$\left(k!\,(n-k)!\,\binom{n}{k} = n! \right)$

dim (formalmente)

si fa per induzione su n. Applico (*)

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \ldots\ldots$$

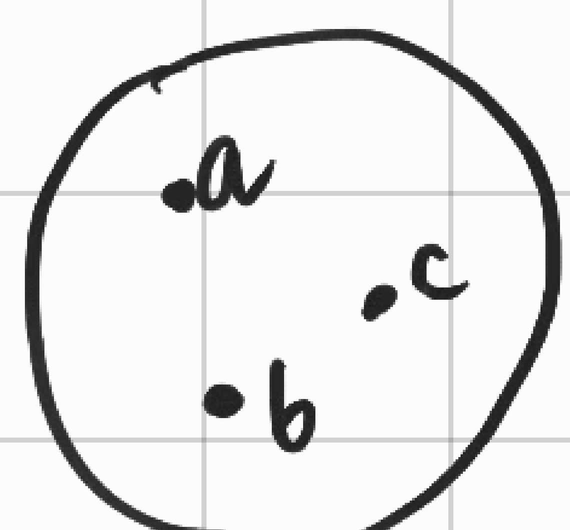
$$\ldots\ldots = \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!}$$

Idea combinatoria

$\binom{n}{k} \overset{?}{=} C_{n,k}$ = combinazione. $\qquad \binom{3}{2}=3$

$C_{n,k}$ = numero dei sottoinsiemi di k elementi di un insieme con n elementi.

3 elementi



$C_{3,2}=3$

sottoinsiemi di 2 elementi: $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{b,c\}$

$$\boxed{C_{n,k}=\binom{n}{k}}$$

a b c

$$(x+1)^3=(x+1)\cdot(x+1)\cdot(x+1)$$

$$= \dots + \binom{3}{2}\cdot x^2 + \dots$$

$C_{3,2}$

$$C_{3,2} = \frac{\text{parole di 2 lettere distinte scelte da un alfabeto di 3}}{\text{a meno dell'ordine.}}$$

$\{a,b,c\}$

$\cancel{aa}$	ab	ac
ba	$\cancel{bb}$	bc
ca	cb	$\cancel{cc}$

$a <^{b}_{c}$ ab, ac

$b <^{a}_{c}$ ba, bc

$c <^{a}_{b}$ ca, cb

$$C_{3,2} = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$$

$$C_{n,k} = \boxed{\frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-k+1)}^{k \text{ fattori}}}{k!}}$$

permutazioni di k oggetti: $\underbrace{k \cdot (k-1) \cdots 2 \cdot 1}_{k \text{ fattori}} = k!$

$$C_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}$$

$\square$

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

$n = 10$, $k = 4$

$$\overbrace{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}^{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$= \frac{10!}{6!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$\binom{10}{2} = \boxed{\frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1}} = 5 \cdot 9 = 45.$$

$$\shortparallel$$

$$\binom{10}{8} = \boxed{\frac{10!}{8!\ 2!}} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{\ldots 1}}{2! \cdot \cancel{8 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 1}}$$

$$\boxed{\frac{n!}{(n-k)!\,k!}} = \boxed{\frac{n!}{k!\,(n-k)!}}$$

$$\binom{10}{8} = \frac{\overbrace{10\cdot 9\cdot \cancel{8}\cdot \cancel{7}\cdot \cancel{6}\cdot \cancel{5}\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{3}}^{8}}{\cancel{8}\cdot \cancel{7}\cdot \cancel{6}\cdot \cancel{5}\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{3}\cdot 2\cdot 1}$$

$$= \frac{10\cdot 9}{2\cdot 1} = 45$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$