ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 7 – 7.10.2020

Rimasugli:

Intersezione e Unione infinite:

Se $\mathcal{A}$ insieme di insiemi

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \quad : \quad x \in \bigcup \mathcal{A} \iff \exists\, \underline{\underline{A \in \mathcal{A}}} : x \in A$$

$$\bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \quad : \quad x \in \bigcap \mathcal{A} \iff \forall\, \underline{\underline{A \in \mathcal{A}}} : x \in A$$

Quindi

$$A \cap B = \bigcap \{A, B\} \qquad \mathcal{A} = \{A, B\}$$

$$A \cup B = \bigcup \{A, B\}$$

Notazione $\rightarrow \forall x \in A : P(x)$

$\rightarrow \forall x : x \in A \Rightarrow P(x)$

se scrivo solo $P(x)$

Esempio

$n + m = m + n$

sottinteso: $\forall n \; \forall m$

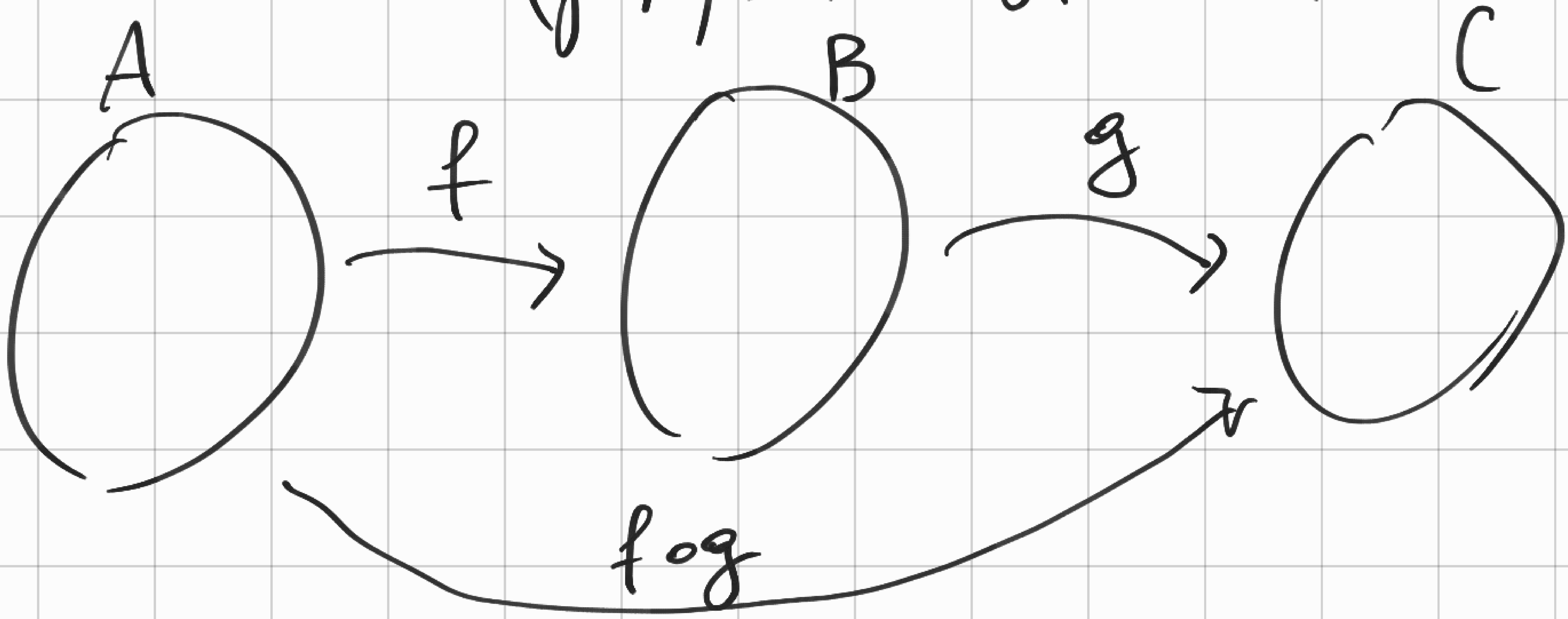
anzi: $\forall n \in \mathbb{N} \; \forall m \in \mathbb{N}$ $\quad \Big| \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$

Composizione di funzioni

$$f: A \to B \qquad g: B \to C$$

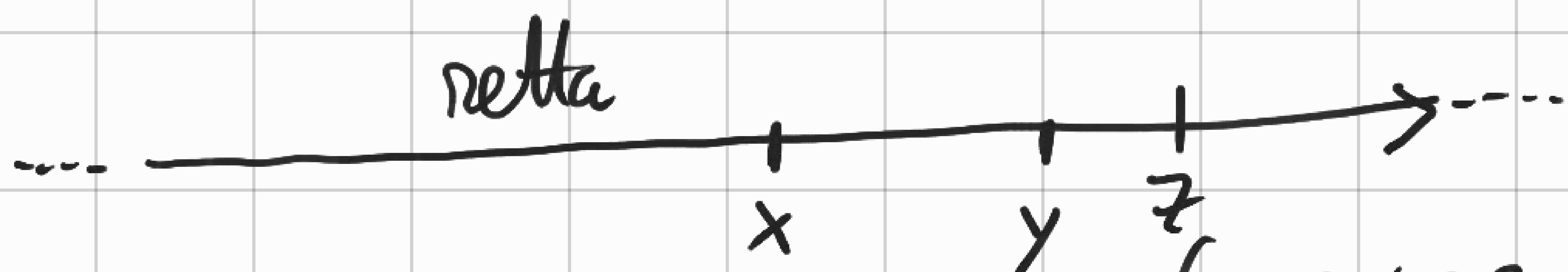
$$g \circ f : A \to C$$

$$(g \circ f)(a) = g(f(a))$$



I NUMERI REALI

$$\left(\mathbb{R}, \leq, +, 0, 1\right)$$



ORDINAMENTO $\leq$ (GRUPPO $+$)

(ORIENTAZIONE)

→ $\leq$ è una relazione d'ordine, totale, denso e continuo.

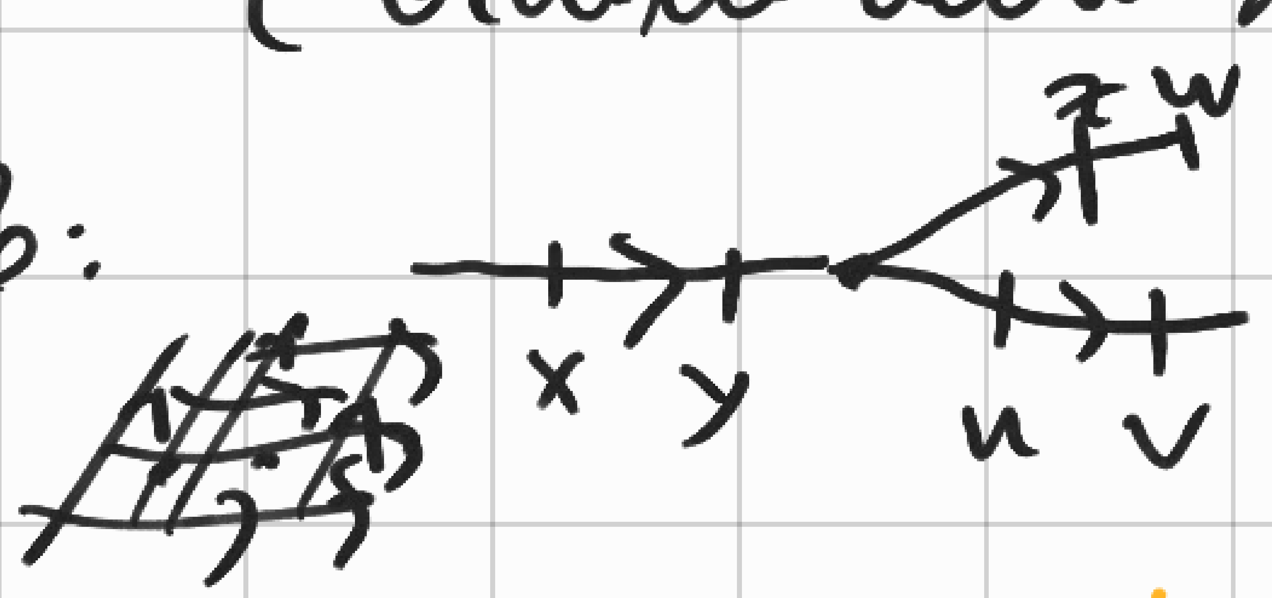
relazione d'ordine (parziale)

(i) $x \leq x$ $\quad (\forall x \in \mathbb{R})$ (riflessiva)

(ii) $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$ (antisimmetrica)

(iii) $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (transitiva)

(iv) $x \leq y \vee y \leq x$ (dicotomia) totale (ordinamento lineare)

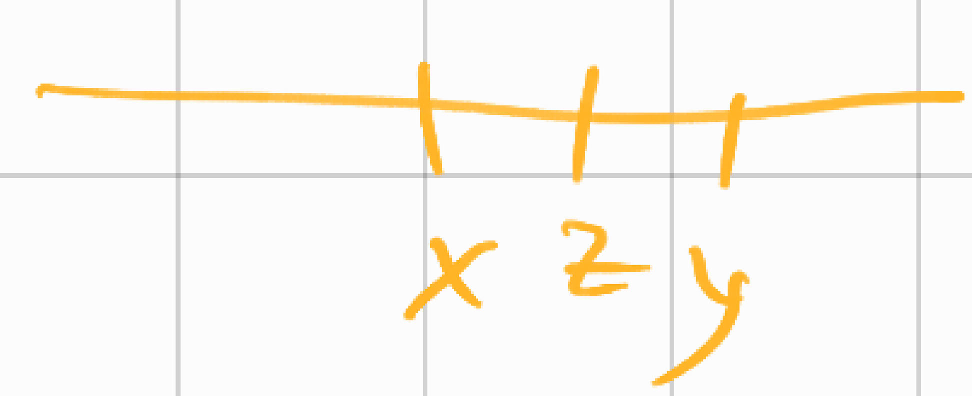
(Esempio di ordine parziale: 

)

Notazione

$$x < y \iff x \leq y \wedge x \neq y$$
$$x \geq y \iff y \leq x$$
$$x > y \iff y < x$$

denso

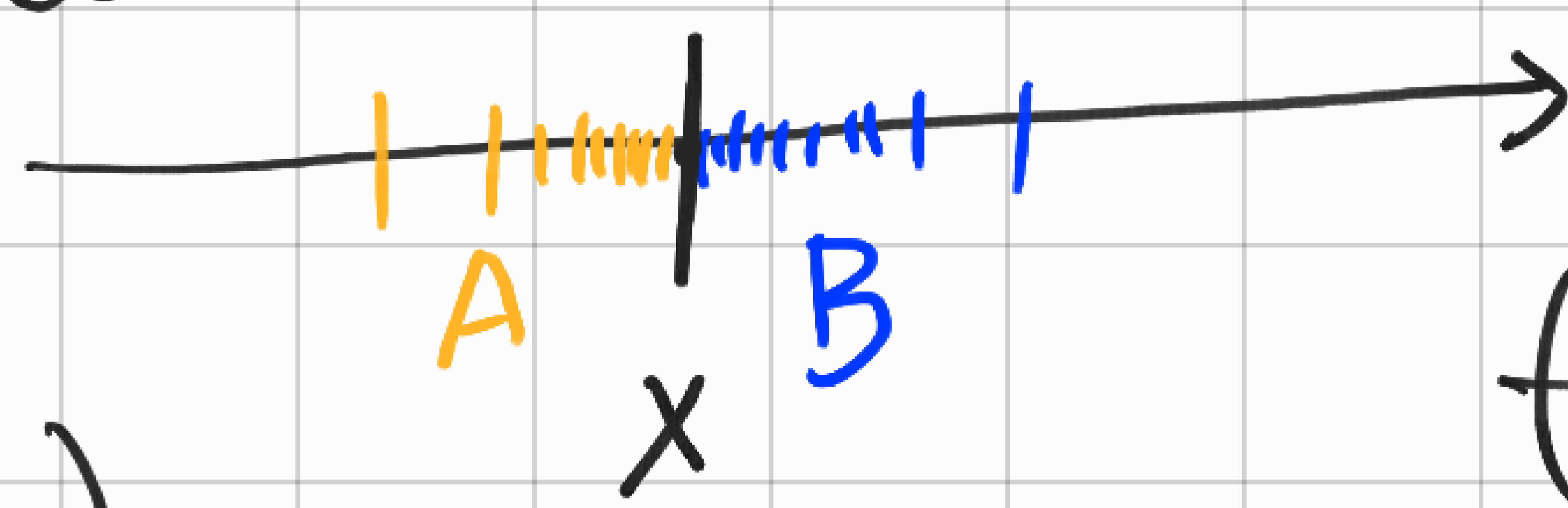


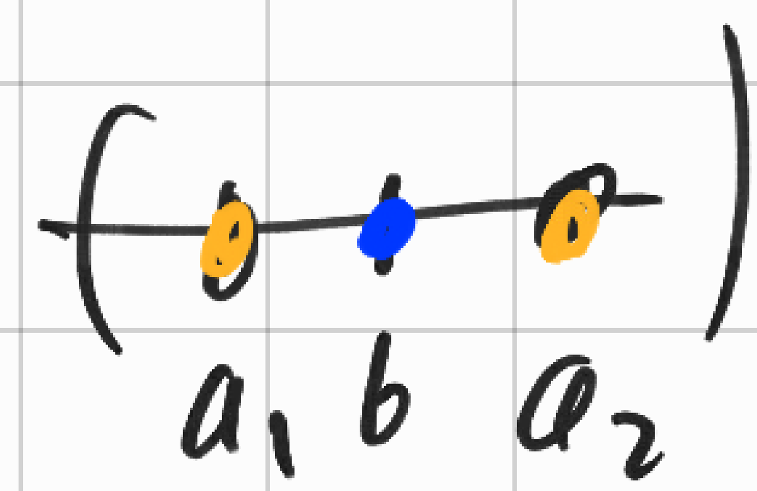
(v) $x < y \Rightarrow \exists z : \quad x < z < y$

(vi) Se $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ continuità Dedekind (o completezza)

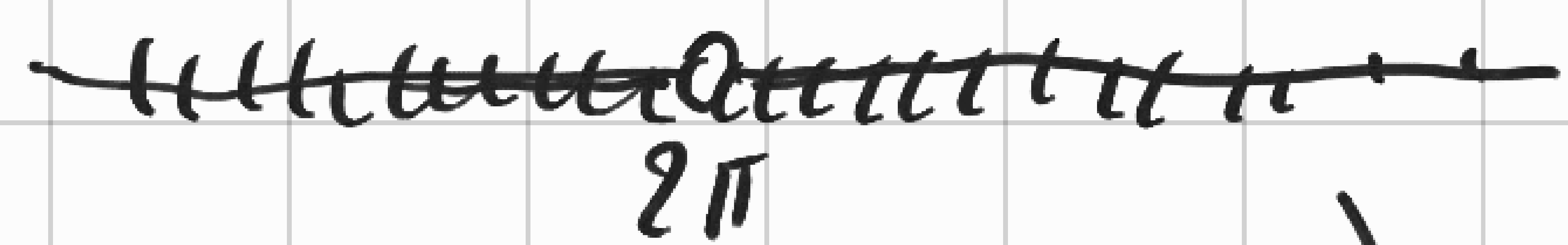
$\forall a \in A : \forall b \in B : \ a \le b$

Allora $\exists x \in \mathbb{R} : \forall a \in A : \forall b \in B : a \le x \le b$





($\mathbb{Z}$ è completo ma non denso)



$$\left(A \le B \Rightarrow \exists x : A \le x \le B \right)$$

Proprietà della addizione +

Esistono i movimenti rigidi (traslazioni). con queste proprietà:

$T = \{\text{traslazioni}\}$

$t \in T \quad t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(i) l'identità è una traslazione $\quad t(x) = x$

esiste un unico $t \in T$

(ii) Dati $x, y \in \mathbb{R} : \exists!\, t \in T : t(x) = y$

$x \overset{t}{\longmapsto} y$

(iii) $t_1, t_2 \in T : \quad t_1 \circ t_2 \in T$

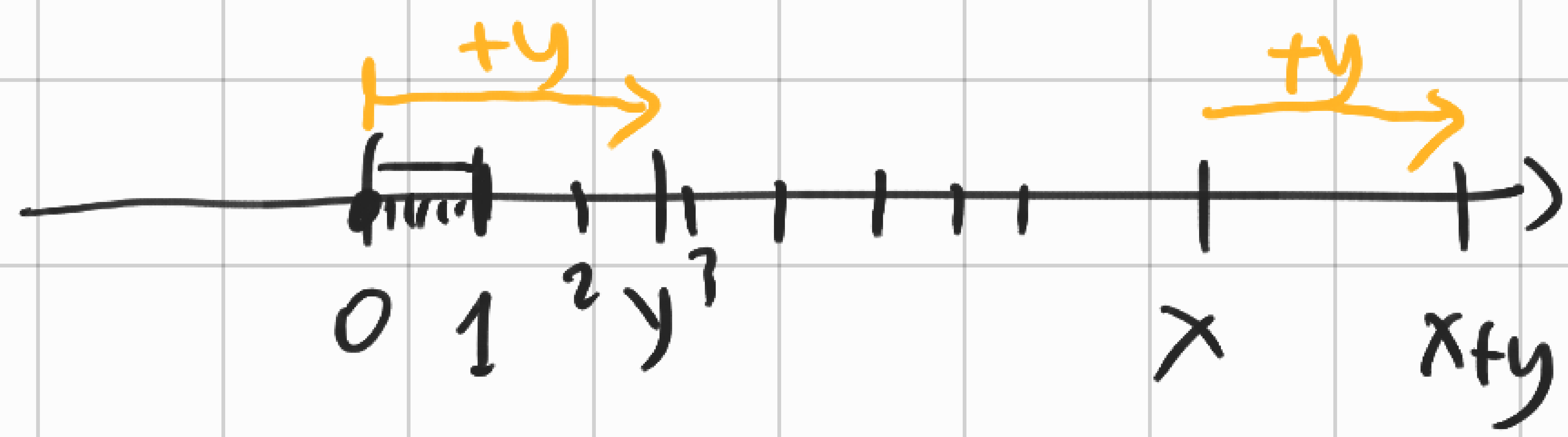
$\exists!\, x : P(x)$ significa:

$\exists x : P(x) \wedge \left(P(x_1) \wedge P(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \right)$

Come definisco la somma?

Fisso $0 \in \mathbb{R}$.

Definisco $x+y = t(x)$ dove $t(0) = y$.



Fissare $1 \in \mathbb{R}$ (u) $(1>0)$ significa fissare una unità di misura.

Osservazione $x \in \mathbb{R}$ $\quad 2 \cdot x = x+x$ ($\mathbb{N}$)

$y \in \mathbb{R}$ $\quad y \cdot x$ ($\mathbb{R}$)

$x = 1\,cm$ $\quad 2x = 2\,cm$

$x = 1\,cm$ $\quad y = 2\,dm$ $\quad x \cdot y = 2\,cm \cdot dm$

Def (Gruppo) $\mathbb{R}$ con $0 \in \mathbb{R}$, $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

elemento neutro

$$(x,y) \longmapsto x+y$$

$$+(x,y) = x+y$$

operatore infisso

gruppo

(i) $(x+y)+z = x+(y+z)$ (associatività)

(ii) $\exists\, 0 \in \mathbb{R} : \ x+0 = 0+x = x$ (el. neutro)

(iii) $\forall x \in \mathbb{R} : \exists\, y \in \mathbb{R} : \ x+y = y+x = 0$ (inverso o opposto)

L'elemento y è unico e si denota con $-x$

Abeliano [(iv) $x+y=y+x$ (commutativa)

Esercizio Verificare che le proprietà di gruppo (i), (ii), (iii) per $\mathbb{R}$ derivano dalle proprietà delle traslazioni $\square$

$\mathbb{R}$ — ordinamento / Gruppo additivo

Proprietà di gruppo ordinato:

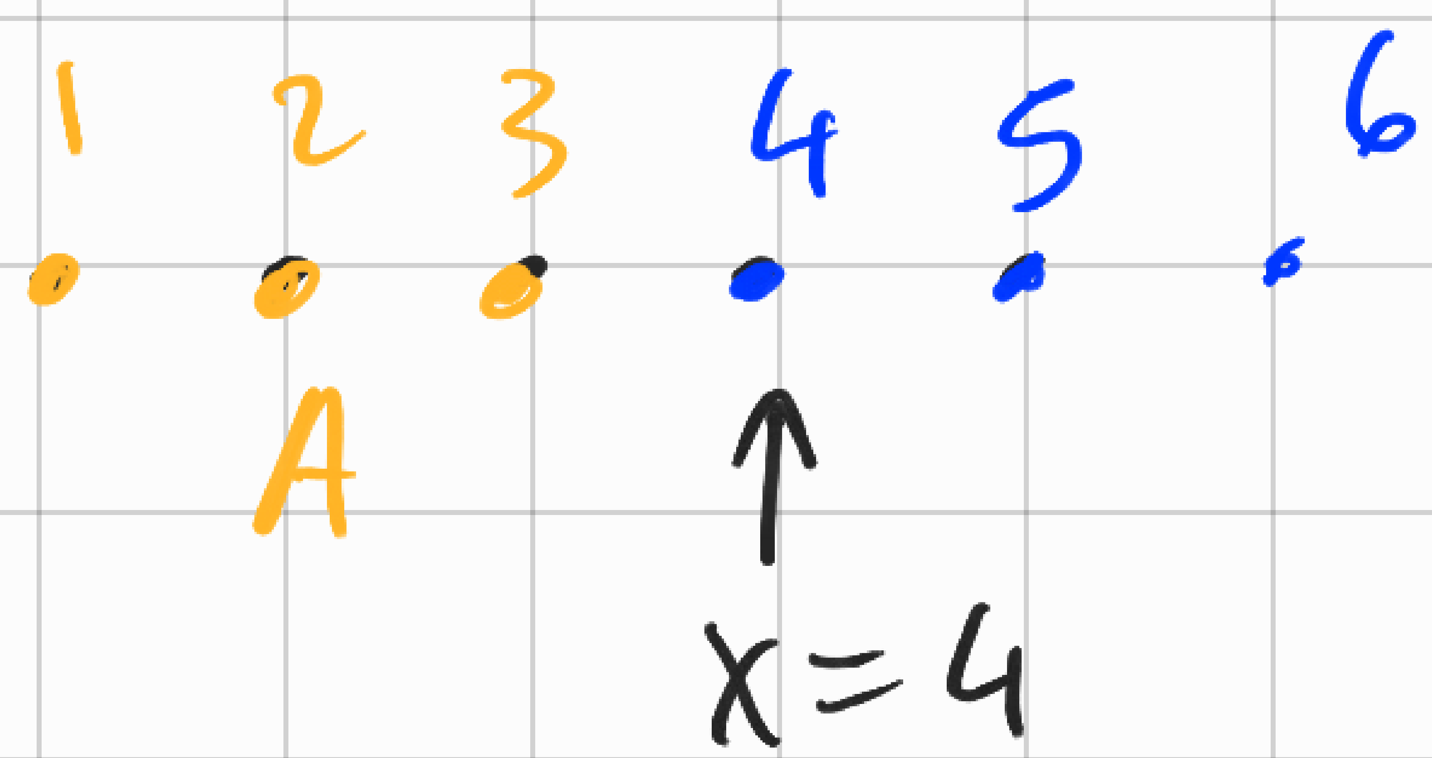
(o) $x \le y \Rightarrow x+z \le y+z$

$\mathbb{Z}+1=\mathbb{Z}$

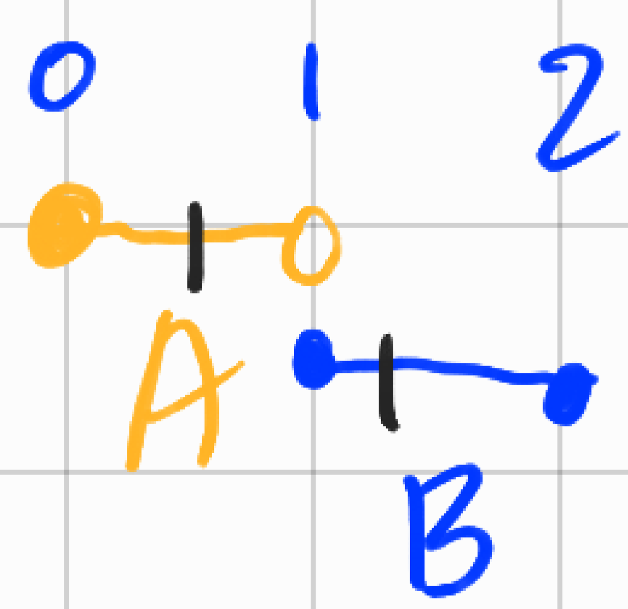
$\underset{n}{\mathbb{Z}} - \underset{m}{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}+\mathbb{Z}=\mathbb{Z}$

non si legge. non è "un tale che"

$\forall x : y \leq x$



$4 \leq \{4,5,6\}$



$A < B$

$A < 1 < B$

NO