Analisi Matematica
Prova scritta n. 2

Corso di laurea in Fisica, 2019-2020

24 giugno 2020

1. Si consideri la funzione
$$f(x) = \frac{1}{1+e^x}.$$
Determinare
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)|.$$
Dimostrare che esiste $L \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ si ha
$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|.$$
Si consideri la successione a_n definita per ricorrenza
$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{1+e^{a_n}}, \\ a_1 = 2020. \end{cases}$$
La successione a_n è convergente?

2. Si consideri l'integrale
$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x \cdot |\sin x|^\beta}{x^\alpha}\, dx.$$
Per quali valori di $\alpha \geq 0$ e $\beta \geq 0$ l'integrale converge?
Calcolare
$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\, dx.$$

3. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale
$$u'' - 6u' + 9u = \sin(3x) + e^{3x} + \frac{e^{3x}}{1+x^2}$$