Analisi Matematica
Prova scritta n. 1

Corso di laurea in Fisica, 2019-2020

3 giugno 2020

1. Si consideri l'equazione differenziale

$$(u'(x)-1)\cdot(\cos x-1)=u(x)\sin x.$$

   Determinare la soluzione u che soddisfa la condizione $u(\pi)=\pi$ e scriverne l'intervallo massimale di esistenza. Trovare una soluzione u definita su tutto l'intervallo $(-2\pi,2\pi)$

2. Si consideri, al variare di $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, il limite

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt[n]{e}+2n^2\ln\cos\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}+\beta\tan\frac{1}{n^2}\right)\cdot n^\alpha\cdot\sin n$$

   Dimostrare che per $x\to 0$ si ha:

$$e^x+2\frac{\ln\cos x}{x^2}-\sin x+\beta\tan x^2=\frac{x^2}{3}+\beta x^2+\frac{x^3}{3}+o(x^3).$$

   Per quali valori di α,β il limite esiste? Quanto vale quando esiste?

3. Al variare del parametro $\alpha>0$ si consideri l'integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}\cdot\left|\sin\frac{1}{x}\right|^\alpha}{\exp\cos x-\exp\left(\cos x-\frac{1}{x}\right)}\,dx$$

   Per quali α l'integrale è convergente?